

ДВЕ СИМЕТРИЧНИ ПОЛЯРИ И ДВА ХАРМОНИЧНО СПРЕГНАТИ ПОЛЮСА

¹Сава Гроздев, ²Веселин Ненков

¹Висше училище по застраховане и финанси

²Технически колеж – Ловеч

Резюме. Описват се някои свойства на полюси и поляри, породени от чевiani в равнината на даден триъгълник.

Keywords: triangle, conic, Euler curve, GSP

Нека ABC е произволен триъгълник с медицентър G , а M_a , M_b и M_c са средите съответно на страните BC , CA и AB . За произволна точка P от равнината на ABC , която не лежи върху никоя от правите BC , CA и AB , определяме $A_1 = AP \cap BC$, $B_1 = BP \cap CA$ и $C_1 = CP \cap AB$. Тъй като триъгълниците ABC и $A_1B_1C_1$ са перспективни с център на перспективност P , то от теоремата на Дезарг следва, че точките $A_0 = BC \cap B_1C_1$, $B_0 = CA \cap C_1A_1$ и $C_0 = AB \cap A_1B_1$ лежат на една права p (ос на перспективност за ABC и $A_1B_1C_1$) (Матеев, 1977). Точките A_1 , B_1 , C_1 , M_a , M_b и M_c лежат на една крива от втора степен Ω , която наричаме *Ойлерова крива* на P спрямо ABC (фиг. 1) (Гроздев & Ненков, 2014). С Ω е свързана описана за ABC крива $k(O)$, чиито център O се получава от P посредством векторното равенство $\vec{PG} = 2 \cdot \vec{GO}$ (фиг. 1) (Гроздев & Ненков, 2014).

Всяка точка (права) има поляра (полюс) спрямо произволно конично сечение (Матеев, 1977). Затова е любопитно да се открият зависимости между полярите и полюсите на P и p спрямо $k(O)$ и Ω . Търсенето на връзки може съществено да се улесни, като се използва помощта на програмата “THE GEOMETER’S SKETCHPAD” (GSP), за да се реализират с геометрични средства необходимите построения и да се извършат някои експерименти с получените обекти. Експериментите с GSP върху полярите p_o и p_w на точката P съответно спрямо $k(O)$ и Ω дават основание да формулираме следното:

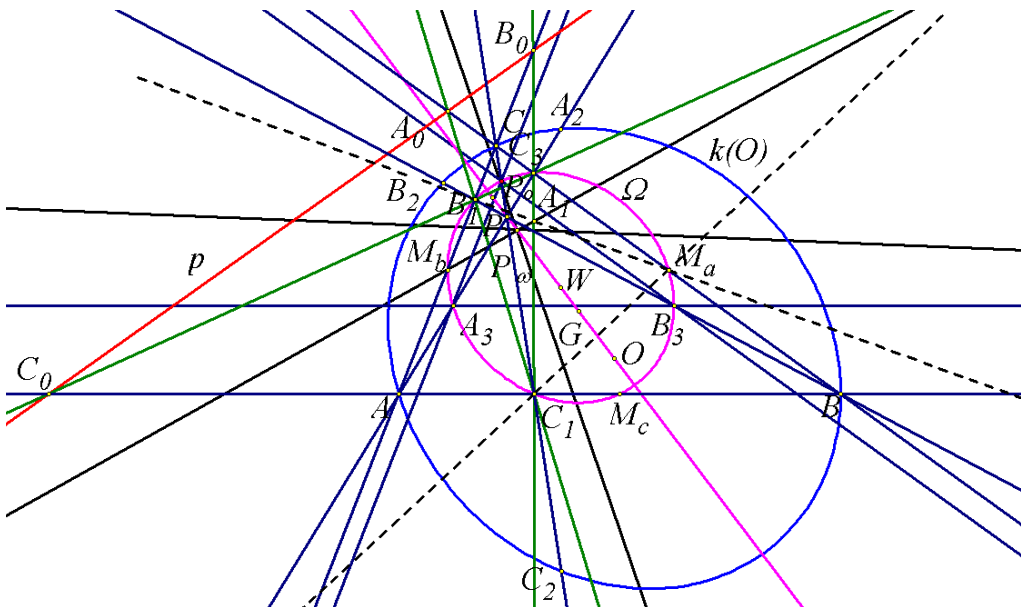
Свойство 1. Полярите p_o и p_w са успоредно симетрични спрямо правата p (фиг. 1).



Свойство 2. Полюсите P_o и P_w лежат на правата PG и са хармонично спрегнати спрямо P и G (фиг. 1).



Първо трябва да отбележим, че както е показано в (Гроздев & Ненков, 2014), $P \equiv O$ точно когато $P \equiv G$. Но в такъв случай p е безкрайната права u_∞ на равнината ABC и затова полюсите ѝ спрямо $k(O)$ и Ω съвпадат с G (Матеев, 1977). Следователно $P \equiv P_o \equiv P_\omega \equiv G$ и $p \equiv p_o \equiv p_\omega \equiv u_\infty$. При това положение и двете свойства не изглеждат достатъчно коректни. Затова по-нататък ще предполагаме, че $P \neq G$. При доказването на формулираните свойства ще използваме барицентрични координати спрямо координатен триъгълник ABC , като $A(1,0,0)$, $B(0,1,0)$, $C(0,0,1)$ и $O(x_0, y_0, z_0)$ ($x_0 + y_0 + z_0 = 1$) (Паскалев & Чобанов, 1985).



Фигура 3

От $A_1\left(0, \frac{1-2y_0}{2x_0}, \frac{1-2z_0}{2x_0}\right)$, $B_1\left(\frac{1-2x_0}{2y_0}, 0, \frac{1-2z_0}{2y_0}\right)$ и $C_1\left(\frac{1-2x_0}{2z_0}, \frac{1-2y_0}{2z_0}, 0\right)$ (Гроздев & Ненков, 2014) намираме скалярно параметричните уравнения на правата B_1C_1 . Те заедно с уравнението $x = 0$ на правата BC определят координатния вид на точката A_0 по следния начин: $A_0\left(0, \frac{1-2y_0}{2z_0 - y_0}, \frac{1-2z_0}{2y_0 - z_0}\right)$. По аналогичен начин определяме

$$B_0\left(\frac{1-2x_0}{2(z_0-x_0)}, 0, \frac{1-2z_0}{2(x_0-z_0)}\right), C_0\left(\frac{1-2x_0}{2(y_0-x_0)}, \frac{1-2y_0}{2(x_0-y_0)}, 0\right).$$

Точките $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и $M_2(x_2, y_2, z_2)$ определят права M_1M_2 , която има уравнение

$$(1) \begin{vmatrix} x & y & z \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} = 0 \text{ (Паскалев \& Чобанов, 1985).}$$

От координатите на A_0, B_0, C_0 и (1) лесно се вижда, че правата p има следното уравнение:

$$(2) \quad (1-2y_0)(1-2z_0)x + (1-2z_0)(1-2x_0)y + (1-2x_0)(1-2y_0)z = 0.$$

В (Гроздев \& Ненков, 2014) е показано, че точките

$$\begin{aligned} A_2 & \left(2x_0 - 1, \frac{(1-x_0)(1-2y_0)}{x_0}, \frac{(1-x_0)(1-2z_0)}{x_0} \right), \\ B_2 & \left(\frac{(1-y_0)(1-2x_0)}{y_0}, 2y_0 - 1, \frac{(1-y_0)(1-2z_0)}{y_0} \right), \\ C_2 & \left(\frac{(1-z_0)(1-2x_0)}{z_0}, \frac{(1-z_0)(1-2y_0)}{z_0}, 2z_0 - 1 \right) \end{aligned}$$

лежат на $k(O)$ и са симетрични съответно на A_1, B_1 и C_1 спрямо дадената точка $P(1-2x_0, 1-2y_0, 1-2z_0)$ (фиг. 1).

От свойствата на вписаните в дадено конично сечение пълни четириъгълници (Матеев, 1977) следва, че точките $A' = BC_2 \cap CB_2$, $B' = CA_2 \cap AC_2$ и $C' = AB_2 \cap BA_2$ лежат върху полярата p_o на P спрямо $k(O)$ (това всъщност е перспективната ос на ABC и $A_2B_2C_2$) (фиг. 1). Като използваме координатите на точките A_2, B_2 и C_2 , намираме уравненията на необходимите двойки прави, а от тях получаваме координатните представяния на A', B' и C' в следния вид:

$$\begin{aligned} A' & \left(-\frac{(1-2x_0)(1-y_0)(1-z_0)}{3y_0z_0+2x_0-1}, \frac{y_0(1-2y_0)(1-z_0)}{3y_0z_0+2x_0-1}, \frac{z_0(1-2z_0)(1-y_0)}{3y_0z_0+2x_0-1} \right), \\ B' & \left(\frac{x_0(1-2x_0)(1-z_0)}{3z_0x_0+2y_0-1}, -\frac{(1-2y_0)(1-z_0)(1-x_0)}{3z_0x_0+2y_0-1}, \frac{z_0(1-2z_0)(1-x_0)}{3z_0x_0+2y_0-1} \right), \\ C' & \left(\frac{x_0(1-2x_0)(1-y_0)}{3x_0y_0+2z_0-1}, \frac{y_0(1-2y_0)(1-x_0)}{3x_0y_0+2z_0-1}, \frac{(1-2z_0)(1-x_0)(1-y_0)}{3x_0y_0+2z_0-1} \right). \end{aligned}$$

От координатите на точките A' , B' , C' и (1) лесно се вижда, че полярата p_o има следното уравнение:

$$(3) \quad (1-x_0)(1-2y_0)(1-2z_0)x + (1-2z_0)(1-y_0)(1-2x_0)y + (1-2x_0)(1-2y_0)(1-z_0)z = 0.$$

В (Гроздев & Ненков, 2014) е показано, че точките A_3 , B_3 и C_3 , които са симетрични съответно на A , B и C спрямо P , лежат на Ω (фиг. 1). От свойствата на вписаните в дадено конично сечение пълни четириъгълници (Матеев, 1977) следва, че точките $A'' = B_1C_1 \cap B_3C_3$, $B'' = C_1A_1 \cap C_3A_3$ и $C'' = A_1B_1 \cap A_3B_3$ лежат върху полярата p_w на P спрямо Ω (това всъщност е перспективната ос на $A_1B_1C_1$ и $A_3B_3C_3$) (фиг. 1).

Като използваме координатите на точките A_1 , B_1 , C_1 , A_3 , B_3 и C_3 , намираме уравненията на необходимите двойки прави, а от тях получаваме координатните представяния на A'' , B'' и C'' в следния вид:

$$\begin{aligned} A'' & \left(\frac{1-2x_0}{2}, \frac{(1-y_0)(1-2y_0)}{2(z_0-y_0)}, \frac{(1-z_0)(1-2z_0)}{2(y_0-z_0)} \right), \\ B'' & \left(\frac{(1-x_0)(1-2x_0)}{2(z_0-x_0)}, \frac{1-2y_0}{2}, \frac{(1-z_0)(1-2z_0)}{2(x_0-z_0)} \right), \\ C'' & \left(\frac{(1-x_0)(1-2x_0)}{2(y_0-x_0)}, \frac{(1-y_0)(1-2y_0)}{2(x_0-y_0)}, \frac{1-2z_0}{2} \right). \end{aligned}$$

От координатите на точките A'' , B'' и C'' и (1) лесно се вижда, че полярата p_w има следното уравнение:

$$(4) \quad x_0(1-2y_0)(1-2z_0)x + y_0(1-2z_0)(1-2x_0)y + z_0(1-2x_0)(1-2y_0)z = 0.$$

Сега от координатите на точките A_0 , B_0 , A' , B' , A'' и B'' лесно се вижда, че векторите $\overrightarrow{A_0B_0}$, $\overrightarrow{A'B'}$ и $\overrightarrow{A''B''}$ са колинеарни с вектора

$$((1-2x_0)(y_0-z_0), (1-2y_0)(z_0-x_0), (1-2z_0)(x_0-y_0)).$$

Това доказва, че правите p_o и p_w са успоредни на p .

За да докажем, че правите p_o и p_w са симетрични спрямо p , ще използваме, че разстоянието d от точка $M'(x', y', z')$ до права $g: ux + vy + wz = 0$ се пресмята по формулата:

$$(5) \quad d = \frac{2|ux' + vy' + wz'| \cdot S}{\sqrt{(u-v)(u-w)a^2 + (v-u)(v-w)b^2 + (w-u)(w-v)c^2}},$$

където a , b , c и S са дължините съответно на страните BC , CA , AB и лицето на ΔABC (Паскалев & Чобанов, 1985).

Нека $M(\lambda, \mu, \nu)$ е произволна точка от правата p . Тогава от (2) следва, че е изпълнено равенството $(1-2y_0)(1-2z_0)\lambda + (1-2z_0)(1-2x_0)\mu + (1-2x_0)(1-2y_0)\nu = 0$. Като вземем предвид последното равенство, от (3), (4) и (5) се получава, че разстоянията от M до правите p_o и p_w са равни на

$$\frac{|\lambda x_0(1-2y_0)(1-2z_0) + \mu y_0(1-2z_0)(1-2x_0) + \nu z_0(1-2x_0)(1-2y_0)|}{\sqrt{\delta}},$$

където

$$\begin{aligned} \delta = & (1-2y_0)(1-2z_0)(x_0-y_0)(x_0-z_0)a^2 + \\ & + (1-2z_0)(1-2x_0)(y_0-z_0)(y_0-x_0)b^2 + (1-2x_0)(1-2y_0)(z_0-x_0)(z_0-y_0)c^2. \end{aligned}$$

Тъй като M е произволна точка от p , то това доказва симетричността на полярите p_o и p_w спрямо p . С това свойство 1 е напълно доказано.

Преминаваме към доказателството на свойство 2. За целта ще използваме, че полюсът на една права спрямо дадено конично сечение е общата точка на полярите на всички точки от тази права (Матеев, 1977). Нека A'_0 , B'_0 и C'_0 са пресечните точки съответно на A_0 , B_0 и C_0 с $k(O)$. От уравнението $k(O)$: $(1-2x_0)x_0yz + (1-2y_0)y_0zx + (1-2z_0)z_0xy = 0$ (Гроздев & Ненков, 2014) и скаларно параметричните уравнения на правите A_0 , B_0 и C_0 определяме

$$\begin{aligned} A'_0 & \left(\frac{x_0(2x_0-1)}{8y_0z_0+3x_0-2}, \frac{(2y_0-1)(z_0-y_0)}{8y_0z_0+3x_0-2}, \frac{(2z_0-1)(y_0-z_0)}{8y_0z_0+3x_0-2} \right), \\ B'_0 & \left(\frac{(2x_0-1)(z_0-x_0)}{8z_0x_0+3y_0-2}, \frac{y_0(2y_0-1)}{8z_0x_0+3y_0-2}, \frac{(2z_0-1)(x_0-z_0)}{8z_0x_0+3y_0-2} \right), \\ C'_0 & \left(\frac{(2x_0-1)(y_0-x_0)}{8x_0y_0+3z_0-2}, \frac{(2y_0-1)(x_0-y_0)}{8x_0y_0+3z_0-2}, \frac{z_0(2z_0-1)}{8x_0y_0+3z_0-2} \right). \end{aligned}$$

Като използваме тези координати, намираме точките

$$\begin{aligned} CA'_0 \cap AB & \left(\frac{x_0(2x_0-1)}{4y_0z_0-2z_0x_0+2x_0-1}, \frac{(2y_0-1)(z_0-y_0)}{4y_0z_0-2z_0x_0+2x_0-1}, 0 \right), \\ BA'_0 \cap BC & \left(\frac{x_0(2x_0-1)}{4y_0z_0-2z_0x_0+2x_0-1}, 0, \frac{(2z_0-1)(y_0-z_0)}{4y_0z_0-2z_0x_0+2x_0-1} \right), \end{aligned}$$

които определят полярата на A_0 спрямо $k(O)$ (фиг. 2) и точките

$$CB'_0 \cap AB \left(\frac{(2x_0-1)(z_0-x_0)}{4z_0x_0-2y_0z_0+2y_0-1}, \frac{y_0(2y_0-1)}{4z_0x_0-2y_0z_0+2y_0-1}, 0 \right),$$

$$AB'_0 \cap BC \left(0, \frac{y_0(2y_0-1)}{4z_0x_0-2y_0z_0+2y_0-1}, \frac{(2z_0-1)(x_0-z_0)}{4z_0x_0-2y_0z_0+2y_0-1} \right),$$

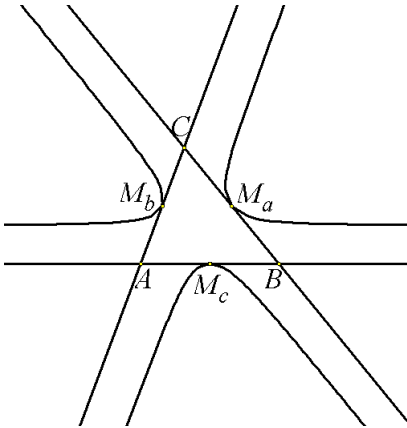
които определят полярата на B_0 спрямо $k(O)$ (фиг. 2).

Пресечната точка P_0 на тези две поляри в координати се представя по следния начин:

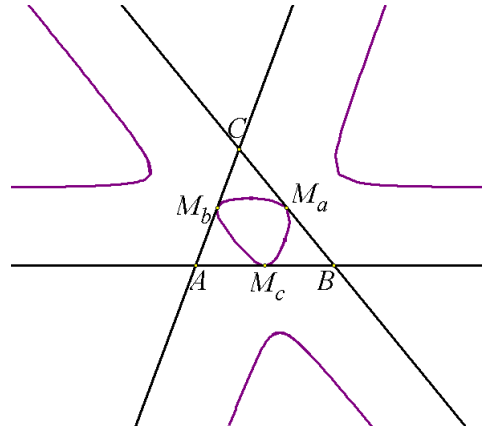
$$(6) \quad P_0 \left(\frac{x_0(1-2x_0)^2}{\tau}, \frac{y_0(1-2y_0)^2}{\tau}, \frac{z_0(1-2z_0)^2}{\tau} \right),$$

където $\tau = 4x_0y_0z_0 - (1-2x_0)(1-2y_0)(1-2z_0)$.

Като използваме (1) от (6), лесно получаваме, че точките P , G и P_0 лежат на една права. Всъщност, както е показано в (Гроздев & Ненков, 2014), на същата права лежи и точката O (фиг. 1, 2, 3.).



Фигура 4



Фигура 5

Експериментите с GSP показват още, че е изпълнено следното:

Свойство 3. Полярите на A_0 , B_0 и C_0 спрямо $k(O)$ минават съответно през точките A_1 , B_1 и C_1 (фиг. 2).

Доказателството на това свойство за полярата на A_0 се получава от (1) и намерените по-рано координати на точките $CA'_0 \cap AB$ и $BA'_0 \cap BC$. Аналогично се показва свойство 3 и за точките B_0 и C_0 .

Сега от (6) определяме простото отношение

$$(GPP_o) = \frac{\overline{GP_o}}{PP_o} = \frac{(1-2x_0)(1-2y_0)(1-2z_0) + 8x_0y_0z_0}{3(1-2x_0)(1-2y_0)(1-2z_0)} = h.$$

Точката P'_o определяме като хармонично спрегната на P_o спрямо G и P . Затова е изпълнено $(GPP'_o) = -h$. От това равенство следва, че в координати P'_o се представя по следния начин: $P'_o \left(\frac{3hx_{P_o}+1}{3(1+h)}, \frac{3hy_{P_o}+1}{3(1+h)}, \frac{3hz_{P_o}+1}{3(1+h)} \right)$, което според (6) води окончателно до координатите:

$$(7) \quad \begin{aligned} x_{P'_o} &= \frac{(1-2x_0)[(1-x_0)(1-2y_0)(1-2z_0) + 4x_0y_0z_0]}{\bar{\tau}}, \\ y_{P'_o} &= \frac{(1-2y_0)[(1-2x_0)(1-y_0)(1-2z_0) + 4x_0y_0z_0]}{\bar{\tau}}, \\ z_{P'_o} &= \frac{(1-2z_0)[(1-2x_0)(1-2y_0)(1-z_0) + 4x_0y_0z_0]}{\bar{\tau}}, \end{aligned}$$

където $\bar{\tau} = 2[x_0y_0z_0 + (1-2x_0)(1-2y_0)(1-2z_0)]$.

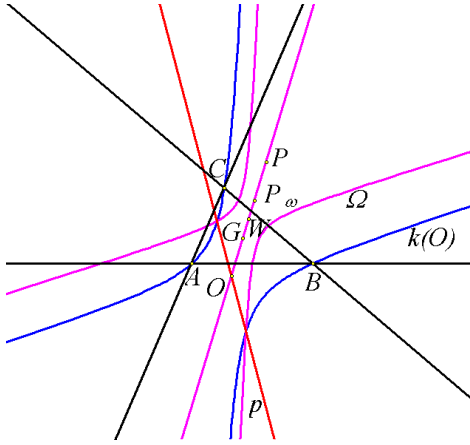
Сега да намерим полярата на A_0 спрямо Ω . Тя е определена от точките

$$\begin{aligned} A_1B_1 \cap C_1M_a &\left(\frac{(z_0-y_0)(1-2x_0)}{2(2y_0z_0-z_0x_0+x_0-z_0)}, \frac{x_0(1-2y_0)}{2(2y_0z_0-z_0x_0+x_0-z_0)}, \frac{(1-2y_0)(1-2z_0)}{2(2y_0z_0-z_0x_0+x_0-z_0)} \right) \\ A_1C_1 \cap B_1M_a &\left(\frac{(y_0-y_0)(1-2x_0)}{2(2y_0z_0-x_0y_0+x_0-z_0)}, \frac{(1-2y_0)(1-2z_0)}{2(2y_0z_0-x_0y_0+x_0-z_0)}, \frac{x_0(1-2z_0)}{2(2y_0z_0-x_0y_0+x_0-z_0)} \right) \end{aligned}$$

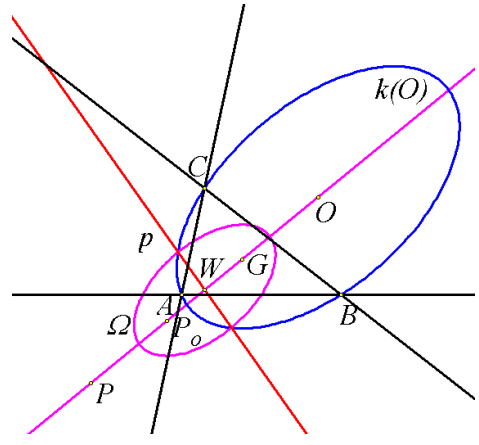
(фиг. 3).

От координатите на последните две точки и (7) с помощта на (1) установяваме, че полярата на A_0 минава през P'_o . По аналогичен начин установяваме, че полярите на B_0 и C_0 спрямо Ω също минават през P'_o . Следователно P'_o е полюсът на p спрямо Ω . Това означава, че $P_w \equiv P'_o$ и затова координатите на P_w се изразяват с (7).

Точката P_o съществува във вида, представен с (6), само когато точката O не лежи върху кривата от трета степен $K: 4xyz - (1-2x)(1-2y)(1-2z) = 0$ (фиг. 4), а точката P_w съществува във вида, представен с (7), само когато точката O не лежи върху кривата от трета степен $\bar{K}: xyz + (1-2x)(1-2y)(1-2z) = 0$ (фиг. 5). В тези случаи разглеждаме съответно P_o или P_w като безкрайната точка на правата OP . В единия случай P_w е среда на отсечката GP и O лежи върху p (фиг. 6), а в другия – P_o е среда на отсечката GP и Ω лежи върху p (фиг. 7). Тези специални случаи се съгласуват с проективното разбиране за връзката между диаметър и неговия безкраен полюс (Матеев, 1977).



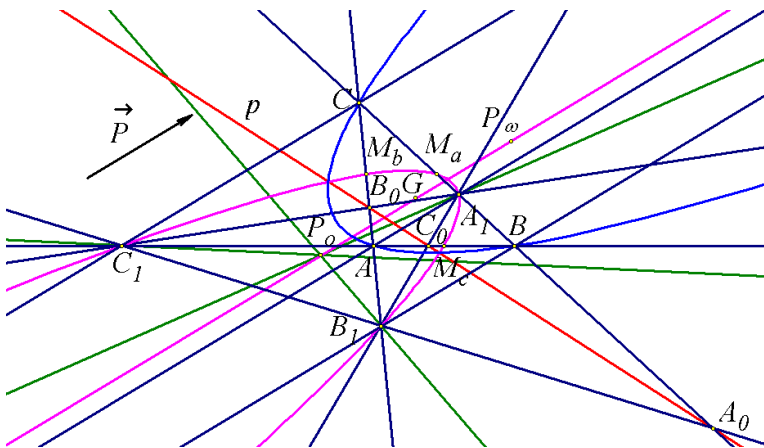
Фигура 6



Фигура 7

Формалното аналитично доказателство на последните факти се получава лесно, като се използва (1), за да се покаже, че $O(\Omega)$ лежи върху p точно когато O лежи върху $K(\bar{K})$, а като се използват координатите на P_w и P_o в съответните случаи, когато O лежи на K или $\bar{K}$, за да се покаже, че P_w или P_o е среда на GP .

С това свойство 2 е напълно доказано.



Фигура 8

За пълнота трябва да разгледаме и случая, при който правите през върховете на $\triangle ABC$ са успоредни. В този случай разглеждаме P като безкрайна точка, определена от направлението на някакъв вектор $\vec{P}$. В този случай, както е показано в (Гроздев & Ненков, 2014), $P \equiv O(x_0, y_0, z_0)$ ($x_0 + y_0 + z_0 = 0$), а кривите $k(O)$ и Ω са параболи с оси по направлението на вектора $\vec{P}$ (фиг. 8). Точката P лежи върху $k(O)$ и Ω , затова безкрайната права u_∞ на равнината ABC като допирателна към тези параболи (Матеев, 1977) е поляра на P спрямо всяка от двете параболи (Матеев, 1977). При това положение, ако приемем, че u_∞ е симетрична на себе си спрямо всяка обикновена (крайна) права, то бихме получили съгласуване на този случай със свойство 1. Експериментите с GSP показват, че е изпълнено следното свойство:

Полюсите P_o и P_w на правата p съответно спрямо $k(O)$ и Ω са симетрични спрямо медицентъра G (фиг. 8).

Доказателството на този факт се получава от следните координатни представления:

$$P_o \left(\frac{x_0^2}{3y_0z_0}, \frac{y_0^2}{3z_0x_0}, \frac{z_0^2}{3x_0y_0} \right), P_w \left(-\frac{y_0^2 + z_0^2}{3y_0z_0}, -\frac{z_0^2 + x_0^2}{3z_0x_0}, -\frac{x_0^2 + y_0^2}{3x_0y_0} \right).$$

Това свойство напълно се съгласува със свойство 2, тъй като в случай че P е безкрайна точка, $(P_o P_w GP) = (P_o P_w G)$ (Матеев, 1977).

Накрая лесно се проверява, че и свойство 3 е изпълнено, в случай че P е безкрайна точка (фиг. 8).

ЛИТЕРАТУРА

- Гроздев, С. & В. Ненков (2014). Обобщения некоторых классических теорем геометрии треугольника. *Теоретические и прикладные аспекты математики, информатики и образования. Сборник материалов международной научной конференции*. Архангельск, САФУ, 35 – 54.
- Матеев, А. (1977). *Проективна геометрия*. София: „Наука и изкуство“.
- Паскалев, Г. & И. Чобанов (1985). *Забележителни точки в триъгълника*. София: „Народна просвета“.

REFERENCES

- Grozdev, S. & Nenkov, V. (2014). Obobshtenia nekotoryh klasicheskikh theorem geometrii treugolnika. *Teoreticheskie i prikladnie aspekti matematiki, informatiki*

i obrazovania. Sbornik materialov mezhdunarodnoj nauchnoj konferencii. Arhangelsk, SAFU, 35 – 54. Mateev, A. (1977). Proektivna geometria. Sofia: „Nauka i izkustvo“.

Paskalev, G. & Chobanov, G. (1985). *Zabelezhitelni točki v tri'g'lnika*. Sofia: „Narodna prosveta“.

TWO SYMMETRIC POLAR LINES AND TWO HARMONICALLY CONJUGATED POLES

Abstract. Some properties are described of poles and polar lines, generated by cevians in the plane of a given triangle.

✉ **Prof. Sava Grozdev, DSc**

University of Finance, Business and Entrepreneurship

1, Gusla Str.

1618 Sofia, Bulgaria

E-mail: sava.grozdev@gmail.com

✉ **Dr. Veselin Nenkov, Assoc. Prof.**

Technical College Lovech

31, Sajko Saev Str.

Lovech, Bulgaria

E-mail: vnenkov@mail.bg