

## ДВАДЕСЕТ И СЕДМА МЛАДЕЖКА БАЛКАНСКА ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКА

**Доц. д-р Ивайло Кортезов, Мирослав Маринов**

*Институт по математика и информатика,  
Българска академия на науките (България)*

**Резюме.** Статията съдържа задачи от подбора за националния отбор за Младежката балканска олимпиада по математика 2023, варианти на решения на задачите, а също и преглед на представянето по тях. Материалите могат да са от полза за школите за подготовка за математически състезания 7. – 9. клас.

*Ключови думи:* математически състезания; Младежка балканиада по математика

Двадесет и седмата младежка балканска олимпиада по математика (МлБОМ) за ученици до 15,5 години се проведе в Тирана, Албания в периода 23 – 28.06.2023. В олимпиадата взеха участие ученици от 19 отбора от 18 държави: Азербайджан (гост), Албания (2 отбора), Босна и Херцеговина, България, Гърция, Казахстан (гост), Кипър, Киргизстан (гост), Молдова, Румъния, Саудитска Арабия (гост), Северна Македония, Сърбия, Таджикистан (гост), Туркменистан (гост), Турция, Франция (гост), Хърватска (гост). Отборът на България за МлБОМ беше в състав:

1. Андрей Стефанов, 8. клас, ПЧМГ, София – *златен медал*
2. Божидар Сакарев, 7. клас, ПЧМГ, София – *бронзов медал*
3. Мая Минкова, 8. клас, СУ „Любен Каравелов“, Несебър – *бронзов медал*
4. Александър Пендов, 7. клас, МГ „Акад. Кирил Попов“, Пловдив – *сребърен медал*
5. Даниел Гетов, 8. клас, СМГ „Паисий Хилендарски“, София – *сребърен медал*
6. Мария Касия Петрова, 8. клас, ПЧМГ, София – *бронзов медал*

В отборното класиране сред 10-те официални участника България зае четвърто място, а сред всички 19 отбора – пето. Според приетите от MASSEE регулации медали се присъждат на около  $\frac{2}{3}$  от участниците в МлБОМ в приблизително отношение златни:сребърни:бронзови = 1:2:3. При определяне границите на съответните медали журито обикновено тълкува тези правила свободно, като отчита наличието на естествени пролуки в класирането по точки на участниците. При относително младия ни отбор и все по-високото ниво на подготовка на конкуренцията, постигнатото на този етап може да ни радва, както и да повиши очакванията

и амбицията ни за догодина. За сравнение през 2018 г. отборът на България завоюва 2 златни и 4 сребърни медала (Kortezov et al. 2018); през 2019 г. и през 2020 г. – 2 златни, 3 сребърни и 1 бронзов (Kortezov & Karlov 2019), (Kortezov 2021); през 2021 г. – 1 златен, 2 сребърни и 3 бронзови (Kortezov et al. 2021); през 2022 г. – 1 златен, 1 сребърен, 3 бронзови (Kortezov & Marinov 2022). Резултатът тази година отчита подобрение спрямо миналогодишното представяне (Kortezov & Marinov 2022), но такива подобрения спрямо предишни години се виждат и при много от конкурентните отбори. Прилагаме пет от дванадесетте задачи от селекционните контролни и примерни решения към тях.

**Задача 1.** (Мирослав Маринов) Да се намерят всички реални числа  $x, y, z$ , такива, че:

$$x^4 + y^3z = zx, \quad y^4 + z^3x = xy \quad \text{и} \quad z^4 + x^3y = yz.$$

**Решение.** Ако някое от числата  $x, y, z$  е 0, да речем  $x$ , то от второто уравнение следва  $y=0$  и така от третото получаваме  $z=0$ . Нека  $x, y, z \neq 0$ . Първото уравнение е еквивалентно на  $z(x-y^3)=x^4$ , а от второто следва, че  $y(x-y^3)=z^3x$ . Оттук с деление получаваме  $\frac{z}{y} = \frac{x^3}{z^3}$ , т.е.  $z^4 = x^3y$ . Аналогично  $x^4 = y^3z$ . Замествайки  $z = \frac{x^4}{y^3}$  в уравнението  $z^4 = x^3y$ , получаваме  $y^{13} = x^{13}$ , откъдето  $x=y$  и  $z = \frac{x^4}{y^3} = x$ . При  $x=y=z$  остава да решим  $2x^4 = x^2$ , което е с корени  $0, \frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}$ . **Отговор:**  $x=y=z \in \{0, \frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\}$ .

**Коментар.** Тази задача се решава само с еквивалентни преобразувания, затова седмокласниците и осмокласниците бяха в едни и същи условия по отношение на необходимите знания, но седмокласниците се представиха блестящо, много по-добре от осмокласниците. Една от причините за това е, че имаше силни осмокласници, които опитваха оценки с неравенства, които те владеят съществено по-добре. Понякога колкото повече знаеш, толкова повече ти вреди.

**Задача 2.** (Ивайло Кортезов) В една от много кутии има  $n$  топчета, а останалите са празни. На лист е записано числото 0. На всеки ход се преместват част от топчетата от някоя непразна кутия в някоя празна, а на листа се записва сумата на предишното число и произведението на броя на топчета в тези две кутии след преместването. След  $k$  хода последното записано на листа число станало 2023. Намерете най-малкото възможно  $n$ .

**Решение.** Нека с  $A_i$  означим числото, което е записано на листа след  $i$ -тия ход, като в началото  $A_0 = 0$ . Нека на втори лист записваме полусбора  $S_i$  на квадратите на бройките топчета в кутиите след  $i$ -тия ход (в началото  $S_0 = n^2/2$ ) и нека  $D_i = 2(A_i + S_i)$ . Когато на  $(i+1)$ -вия ход от кутия с  $a+b$  топчета

преместим  $a$  топчета в празна кутия, на първия лист записваме  $A_{i+1}=A_i+a.b$ , а на втория –  $S_{i+1}=S_i+(a^2+b^2-(a+b)^2)/2$ . При това

$$D_{i+1}=2(A_{i+1}+S_{i+1})=2A_i+2ab+2S_i+a^2+b^2-(a+b)^2=2A_i+2S_i=D_i,$$

т.е. удвоеният сбор не се променя: той е винаги равен на  $D_0=2(A_0+S_0)=n^2$ . В края  $D_k=2.2023+2S_k$ , където  $2S_k$  е сборът от квадратите на няколко естествени числа, чиято сума е  $n$ , т.е.  $2S_k \geq n$ . Оттук  $n^2 \geq 2.2023+n$ , т.е.  $n(n-1) \geq 4046$  и  $n \geq 65$ .

Остава да покажем, че при  $n=65$  е възможно да постигнем  $A_k=2023$ . За целта удвоеният резултат на втория лист трябва да е станал  $65^2-4046=179$ . Това е възможно например, ако има 11 топчета в една кутия, по 2 топчета в две кутии и по 1 топче в  $65-11-2-2=50$  кутии:  $11^2+2.2^2+50=179$ .

**Коментар.** Много от решенията от състезателите бяха рекурсивни, но на практика еквивалентни на показаното. Това не е изненада предвид факта, че много от явилите се участват и в състезания по информатика. Въобще тази година имаме много състезатели със силно алгоритмично мислене (трима от които се класираха за отбора), като това им даде предимство на комбинаторната задача от МлБОМ.

**Задача 3.** (Мирослав Маринов) Даден е остроъгълен неравнобедрен триъгълник  $ABC$  с ортоцентър  $H$ , височина  $CD$  ( $D \in AB$ ) и описана окръжност  $k$ . Окръжността  $\omega$  с диаметър  $CH$  пресича  $k$  за втори път в точката  $P$ . Правите  $AP$  и  $BP$  пресичат  $\omega$  за втори път в точките  $K$  и  $L$ , а правите  $DK$  и  $DL$  пресичат  $\omega$  за втори път в точките  $S$  и  $T$ . Да се докаже, че  $KL=ST$ .

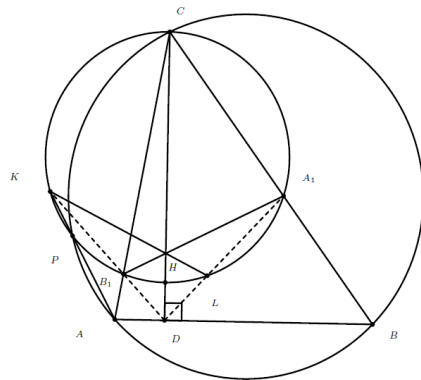
**Решение.** (Андрей Стефанов) Ще докажем, че  $D$ ,  $K$  и петата  $B_1$  на височината през върха  $B$  ( $B_1 \in \omega$  поради  $\angle BB_1C=90^\circ$ ) лежат на една права.

Понеже  $AB_1HD$  е вписан, имаме  $\angle AB_1D=\angle AHD=90^\circ-\angle HAD=\angle ABC$ .

От  $\omega$  и  $k$  получаваме  $\angle CB_1K=\angle CPK=180^\circ-\angle APC=\angle ABC$ . Следователно  $\angle AB_1D=\angle CB_1K$  и получаваме желаната колинеарност.

Аналогично точките  $D$ ,  $L$  и петата  $A_1$  на височината през върха  $A$  лежат на една права. В частност  $A_1 \equiv T$ ,  $B_1 \equiv S$  и е достатъчно да докажем, че  $KL=A_1B_1$ . В  $\omega$  имаме  $\angle A_1CB_1=\angle ACB$  и  $\angle KCL=180^\circ-\angle KPL=\angle APB=\angle ACB$ ; от съответните дъги следва исканото.

**Коментар.** Тази сравнително лесна задача получи едва две пълни



Фигура 1

решения поради липсата на навици у състезателите за точен чертеж (фиг. 1) и предположения върху него. Авторското решение е по-дълго и използва добре известния факт, че симетричната точка на  $H$  относно средата на  $AB$  лежи на  $k$  – за съжаление, този факт също бе рядко споменат от учениците въпреки акцентирането му в публичните материали за подготовка преди контролните.

**Задача 4.** (Шортлист MOM 2022) На дъската са записани в червено всички прости числа, по-малки или равни на  $n$ , а в синьо са записани всички възможни суми на две различни червени числа. За кои естествени  $n \geq 3$  произведението на всички сини числа се дели на произведението на естествените числа от 1 до  $n$  включително?

**Отговор:** 7

**Решение.** Нека първо  $n \geq 11$  и нека  $r \geq 11$  е най-голямото просто число, по-малко или равно на  $n$ . Тогава  $r$  дели произведението на сините числа и значи непременно дели някое събираемо от вида  $p+q$ , където  $p$  и  $q$  са различни прости числа, ненадминаващи  $n$ . От максималността на  $r$  имаме  $p+q \leq 2r$ , следователно  $r=p+q$  и тъй като  $r$  е нечетно, то непременно някое от  $p$  и  $q$  е 2 – в частност,  $r-2$  е просто число.

Това число също дели някое събираемо от вида  $x+y$  за различни прости  $x < y \leq n$ . Тъй като  $x+y \leq 2r-2$ , то  $3(r-2) \leq x+y \leq 2r-2$  е невъзможно.

При  $2(r-2)=x+y$  няма как  $x=r-2$ ,  $y=r$  или обратното, значи трябва или  $x=r-4$ ,  $y=r$ , или  $x \leq y-2 \leq r-4$  (има поне две прости числа между 3 и  $r-2$  включително, все нечетни), което дава  $x+y \leq 2r-6$ , противоречие. Така или  $x=r-4$ , или  $x+y=r-2 \geq 9$  и тъй като  $r-2$  е нечетно, то някое от  $x$  и  $y$  е 2. И в двата случая получаваме, че непременно  $r-4$  е просто число.

Оттук  $r$ ,  $r-2$ ,  $r-4$  са прости числа, което е невъзможно за  $r \geq 11$ , понеже  $r-2 > r-4 > 3$ , а някое от  $r-2$  и  $r-4$  се дели на 3. Така  $n \leq 10$ , а тези възможности се проверяват директно.

**Коментар.** Похвално е, че тази задача по теория на числата беше масово решена (втората най-решена от всичките 12) въпреки иновативната си формулировка и изобщо избягването на всякакви възможни стандартни техники, които много състезатели в България са привикнали да използват.

**Задача 5.** (Мирослав Маринов) Нека  $n$  е естествено число. Първоначално на дъската е записано  $n$  пъти числото 2. За един ход избираме две числа  $a$  и  $b$  на дъската, изтриваме ги и на тяхно място записваме числото  $\sqrt{\frac{ab+1}{2}}$ .

След  $n-1$  хода на дъската остава едно число.

а) Да се докаже, че без значение какви са били ходовете, оставащото число ще е винаги по-голямо или равно на  $\sqrt{\frac{n+3}{n}}$ .

б) Да се докаже, че съществуват безбройно много  $n$ , за които равенство в а) не се достига, без значение какви са ходовете, както и че съществуват безбройно много  $n$ , за които равенство в а) се достига при подходящ избор на ходове.

**Решение.** а) Разсъждаваме индуктивно по  $n$ . При  $n=1$  имаме само едно число и то е  $2 = \sqrt{\frac{1+3}{1}}$ . Да допуснем, че исканото е вярно за всички  $n < k$ , където  $k \geq 2$  е естествено число, и ще го докажем за  $n=k$ . Нека  $u$  и  $v$  са числата, останали на дъската след  $k-2$  операции. Тогава числото след последния ход е  $\sqrt{\frac{uv+1}{2}}$  и целим да докажем  $\frac{uv+1}{2} \geq 1 + \frac{3}{k}$ , т.е.  $uv \geq 1 + \frac{6}{k}$ .

Разглеждайки редицата от операции, които водят до  $u$  и  $v$ , виждаме, че  $u$  е получено от някакво множество от  $1 \leq t \leq k-1$  двойки чрез верига от  $t-1$  операции, както и че  $v$  е получено от останалите  $k-t$  двойки чрез верига от  $k-t-1$  операции. Така от индукционното допускане получаваме  $u \geq \sqrt{1 + \frac{3}{t}}$  и  $v \geq \sqrt{1 + \frac{3}{k-t}}$ . Вече е достатъчно да докажем, че  $\sqrt{1 + \frac{3}{t}} \sqrt{1 + \frac{3}{k-t}} \geq 1 + \frac{6}{k}$ . Повдигане на квадрат, освобождаване от знаменател и опростяване води до еквивалентното  $(k-2t)^2 \geq 0$ , което е вярно. С това индукцията е завършена.

б) Необходимо и достатъчно условие за достигане на равенство е  $k=2t$  при всяко прилагане на индукционния аргумент. Еквивалентно, началният брой двойки е степен на 2, затова ги разделяме на групи от по две, прилагаме операцията за всяка група и т.н.

**Коментар.** Тази алгебрична задача с комбинаторна нотка получи две пълни решения (от информатици, не е изненада предвид дървовидната структура на процеса) и още две решения на подзадачата 5.а, което е похвално, предвид че бе планирана да е най-трудна измежду четирите задачи в съответния ден.

Десетте най-силни резултата от контролните са показани в таблица 1.

Между учениците от 5-о до 7-о място бе проведено допълнително тестово състезание поради равния брой точки от трите контролни.

На МлБОМ почти винаги прагът за сребърен медал е около 20 т., което се равнява на около 2 решени задачи, или иначе казано, „много от стандартните идеи в темата са овладени“. Предвид, че средно на едно контролно шестият от отбора има 19,33 т. въпреки средната трудност на задачите, това е индикация, че България има потенциал за консистентни представяния на МлБОМ с 6 медала, всеки сребърен или златен.

Таблица 1

| Ученик              | Клас | Училище                  | Град    | Сбор |
|---------------------|------|--------------------------|---------|------|
| Андрей Стефанов     | 8    | ПЧМГ                     | София   | 82   |
| Божидар Сакарев     | 7    | ПЧМГ                     | София   | 79   |
| Мая Минкова         | 8    | СУ „Любен Каравелов“     | Несебър | 67   |
| Александър Пендов   | 7    | МГ „Акад. Кирил Попов“   | Пловдив | 63   |
| Даниел Гетов        | 8    | СМГ „Паисий Хилендарски“ | София   | 58   |
| Мария Касия Петрова | 8    | ПЧМГ                     | София   | 58   |
| Аделина Доровска    | 8    | ПЧМГ                     | София   | 58   |
| Борис Ангелов       | 8    | СМГ „Паисий Хилендарски“ | София   | 44   |
| Васил Драмбозов     | 8    | СМГ „Паисий Хилендарски“ | София   | 42   |
| Мартин Омаров       | 8    | СМГ „Паисий Хилендарски“ | София   | 41   |

Според мнението на авторите това е било възможно всяка година от 2013 г. насам, предвид темите, но се е постигнало рядко поради грешки в подготовките (например преподаване на неподходящи задачи, много над нивото на МлБОМ) и често поради психологически причини (напр. от притеснение състезател не успява да даде всичко от себе си и може да предаде празен лист на задача). Колега от Румъния сподели колко е впечатлен от работата на психолога им с участниците от техния отбор и от отражението върху резултатите им. Занапред е разумно това да се отчете и у нас, особено предвид наличието на щатен психолог в Сдружението на олимпийските отбори по природни науки (СООПН).

В заключение, отбелязваме, че в международен план основните цели на МлБОМ, заложили при нейното създаване през 1997г., вече са далеч надхвърлени. Тя вече не просто подготвя състезателите за бъдещи битки, а е сама по себе си сериозно състезание, с все по-високи собствени стандарти, с международно признание – повод за гордост на всички, допринесли за нейната поява и развитие. И е все по-важен фактор за повишаване равнището на обучение по състезателна математика в региона. Това се отразява на държавите – официални участнички, като постоянно вдига нивото на задачите за национални състезания и контролни. Предвид това от тази година в България се увеличи трудността на задачите с неравенства в националните състезания и олимпиади, а в контролните имаше и задачи по геометрия, изискващи владеене на подобни триъгълници. През следващата учебна година трябва да се работи повече в психологически аспект и в частност – за всяка задача състезателят да умее бързо да премисля всички основни идеи, които е срещал при съответния тип задачи, за да прецени кои от тях заслужават по-задълбочено разглеждане, както и при нерешена задача

да пише на бела всички важни свои идеи. Това изглежда по-лесно, отколкото е всъщност.

## ЛИТЕРАТУРА

- КОРТЕЗОВ, И., 2021. Подбор и участие на отбора на България в XXIV младежка балканиада по математика. *Математика и информатика*, том 64, № 1, стр. 8 – 23. ISSN:1310-2230.
- КОРТЕЗОВ, И., КАРЛОВ, Е., 2019. XXIII младежка балканиада по математика, Кипър 2019. *Математика*, № 5, стр. 26 – 27.
- КОРТЕЗОВ, И., КАРЛОВ, Е., МАРИНОВ, М., 2021. Подготовка за XXV младежка балканиада по математика 2021. *Математика и информатика*, том 64, № 5, стр. 483 – 486. ISSN 1310-2230 (Print), <https://doi.org/10.53656/math2021-5-2-pod>.
- КОРТЕЗОВ, И., КАРЛОВ, Е., ТОМОВА, М., 2018 XXII Младежка балканиада по математика. *Математика*, № 5, стр. 16 – 21.
- КОРТЕЗОВ, И., МАРИНОВ, М., 2022. Двадесет и шеста младежка балканска олимпиада по математика. *Математика и информатика*, том 65, № 4, стр. 358 – 364. ISSN:1310-2230, <https://doi.org/10.53656/math2022-4-3-dva>

## REFERENCES

- KORTEZOV, I., 2021. Selection and participation of the team of Bulgaria at the XXIV Junior Balkan Mathematical Olympiad. *Mathematics and Informatics*, vol. 64, no. 1, pp. 8 – 23. ISSN:1310-2230 [in Bulgarian].
- KORTEZOV, I., KARLOV, E., 2019. XXIII Junior Balkan Mathematical Olympiad, Cyprus 2019. *Matematika*, no. 5, pp. 26 – 27 [in Bulgarian].
- KORTEZOV, I., KARLOV, E., MARINOV, M., 2021. Preparation for the XXV Junior Balkan Mathematical Olympiad 2021. *Mathematics and Informatics*, vol. 64, no. 5, pp. 483 – 486. ISSN 1310-2230 (Print) [in Bulgarian]. <https://doi.org/10.53656/math2021-5-2-pod>
- KORTEZOV, I., KARLOV, E., TOMOVA, M., 2018 XXII Junior Balkan Mathematical Olympiad. *Matematika*, no. 5, pp. 16 – 21 [in Bulgarian].
- KORTEZOV, I., MARINOV, M., 2022. Twenty-sixth Junior Balkan Mathematical Olympiad. *Mathematics and Informatics*, vol. 65, no. 4, pp. 358 – 364. ISSN:1310-2230 [in Bulgarian]. <https://doi.org/10.53656/math2022-4-3-dva>

## TWENTY-SEVENTH JUNIOR BALKAN MATHEMATICAL OLYMPIAD

**Abstract.** The paper includes problems from the team selection tests for the national team for JBMO 2023, as well as model solutions and short comments on the performance of the contestants. The materials included can be useful for the groups for preparation for junior high school math contests.

*Keywords:* math contests; JBMO; junior high school

✉ **Dr. Ivaylo Korteov, Assoc. Prof.**

ORCID iD: 0000-0002-9062-2609

Institute of Mathematics and Informatics

Bulgarian Academy of Sciences

Acad. G. Bonchev St., Block 8

1113 Sofia, Bulgaria

E-mail: korteov@math.bas.bg

✉ **Miroslav Marinov**

ORCID iD: 0009-0009-0536-7833

Institute of Mathematics and Informatics

Bulgarian Academy of Sciences

Acad. G. Bonchev St., Block 8

1113 Sofia, Bulgaria

E-mail: miri\_plovdiv@abv.bg