

*If You Work with Young Students
Ако работите с малки ученици*

ДВА ПОДХОДА ЗА ИЗУЧАВАНЕ НА УРАВНЕНИЯ В НАЧАЛНАТА УЧИЛИЩНА МАТЕМАТИКА

¹Здравко Лалчев, ²Маргарита Върбанова, ³Ирина Вутова

¹Софийски университет „Св. Климент Охридски“

²Великотърновски университет „Св. св. Кирил и Методий“

³Софийски университет „Св. Климент Охридски“

Резюме. Авторите въвеждат понятието аритметично уравнение и правят математически и методически паралел между традиционния метод на неизвестния компонент и метода на аритметичните преобразувания (инверсията) за решаване на аритметични уравнения в началната училищна математика.

Keywords: primary school mathematics, arithmetical equation, arithmetical transformation, inversion, mathematical model

Въведение. Безспорно е, че уравнението е един от най-популярните математически модели в училищните курсове по математика и е естествено то да има своето място и в математиката за началното училище. Аргументите на противоположното мнение са, че уравненията са алгебрични обекти, което ги прави високо абстрактни и по тази причина не е възможно тяхното включване в курсовете по начална училищна математика. И тъй като по-голямата част от задачите в началната училищна математика съдържат в себе си идеята за „уравняване“ и реално техните математически модели са уравнения, то на практика се стига до парадокса да се моделира ситуацията с аритметично равенство „ребус“, в който неизвестното се означава с „празно квадратче“. Не смятаме, че „неявното“ използване и „ребусната“ форма чувствително понижават абстракцията на уравнението. Напротив, нашето мнение е, че по този начин се ограничават възможностите на уравнението като средство за моделиране на различни проблемни практически ситуации и се скрива неговата математическа същност.

Далеч сме от мисълта, че в началното училище е възможно или необходимо да се въвежда общото математическо понятие уравнение, но има една категория уравнения, които успешно могат да бъдат изучавани и прилагани в обучението по математика в началните класове и при това в явен вид. Многогодишният опит в преподаване на математика на студенти – бъдещи начални учители, ни подсказва, че логически е възможно и методически е целесъобразно от множеството на уравнени-

ята да се отдели класът на уравнения, в които неизвестното се среща само веднъж (на едно място) в равенството. Ако уравнението е с едно неизвестно и неизвестното се среща само веднъж и в равенството са използвани само операциите събиране, изваждане, умножение и деление (редът на действията е еднозначно определен с двойки скоби), то при подходящо подбрани коефициенти измежду естествените числа уравненията в този клас с пълно право можем да наречем „аритметични“. Това наименование е удачно, защото в конструкцията са използвани само аритметични средства и тяхното решение може да бъде представено без каквито и да били алгебрични „манипулации“ (привеждане, прехвърляне, прибавяне или умножаване с един и същ израз, изобщо тъждествени преобразувания на алгебрични изрази и еквивалентни преобразувания на уравнението в алгебричен смисъл на думите). При методически подходящ подход аритметичните уравнения с успех могат да бъдат изучавани и използвани в началната училищна математика, тъй като те се отличават както по своята яснота на конструкцията, така по своята алгоритмичност на решението. Системата от задачи – компоненти на главната задача (уравнение), е ясно и еднозначно определена, което придава на понятието уравнение методически предимства при моделиране на ситуации, описвани в т. нар. текстови задачи.

Интересно е и това, че както при съставяне, така и при решаване на аритметичните уравнения могат да бъдат използвани два подхода. Единият подход се нарича метод на неизвестния компонент, а другия можем да наречем метод на аритметичните преобразувания. Двата подхода са равностойни от математическа, но не са равностойни от методическа гледна точка. В тази разработка ще направим математически и методически паралел между двата подхода и ще оставим читателя да направи своите изводи по отношение на предимствата на единия или на другия.

В предварителните бележки ще добавим още, че съгласно учебната програма по математика за началните класове уравненията, доколкото са предмет на обучението по математика, се решават аритметично – по правилата за намиране на неизвестен компонент. При това кръгът на уравненията, изучавани в редовните часове по математика, е „свит“ до основни (елементарни) уравнения, свързани с четирите аритметични операции. Но не е тайна и това, че на математически състезания и конкурси в списъка на задачите в немалко случаи участват и задачи (или подзадачи) които по същество са съставни аритметични уравнения. Например:

1 зад. *Да се намери неизвестното число b в израза:*

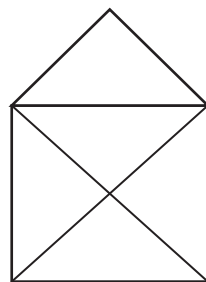
$((b + 2002) - 2003) + 2004 : 2005 + 2006 = 2007$ (56-а Национална олимпиада по математика, 4. клас, общински кръг – 18. 03. 2007).

2 зад. Намерете произведението на числото, изразяващо броя на триъгълниците на чертеж 1 и стойността на неизвестното x от равенството:

$$2007 - ((12x - 13.12) : 6 : 3 + 3) \cdot 14 + 1 = 6.$$

(Тема за приемане в V клас – ПМГ „Акад Н. Обрешков“, Бургас, 2007)

На този етап в началното математическо образование задачите за уравнения са все още в категорията „нестандартни“. Ние сме на мнение, че това положение може да бъде променено и темата уравнения да бъде „стандартизирана“, тъй като аритметичните уравнения са „моделируеми“ с аритметични преобразувания.



Черт. 1

1. Преглед на елементарните аритметични уравнения.

Правила за намиране на неизвестен компонент

За удобство и за да не усложняваме излишно текста, ще работим само с уравнения, чиито коефициенти и решения са естествени числа. Неизвестното число ще означаваме с x , а коефициентите – с числа, записани с цифри или с първите малки букви на латинската азбука.

На основата на първите четири аритметични операции е възможно формално да се образуват осем вида уравнения за неизвестен първи или втори компонент:

(1) Уравнение за неизвестно първо събираемо ($x + a = b$)

Уравнението се решава, като се прилага правилото: първото събираемо е равно на разликата на сбора и второто събираемо. В случая $x = b - a$.

Пример 1. Да се намери неизвестното число x от равенството $x + 20 = 45$.
Решение: $x = 45 - 20$.

(2) Уравнение за неизвестно второ събираемо ($a + x = b$)

Уравнението се решава, като се прилага правилото: второто събираемо е равно на разликата на сбора и първото събираемо. В случая $x = b - a$.

Пример 2. Да се намери неизвестното число x от равенството $30 + x = 72$.
Решение: $x = 72 - 30$.

(Забележка. От математическа гледна точка събирането на естествени числа е комутативна операция и уравненията от първия и втория вид са еквивалентни (неразличими), но по методически причини ние предпочитаме да ги разглеждаме като различни видове.)

(3) Уравнение за неизвестно умаляемо ($x - a = b$)

Уравнението се решава, като се прилага правилото: умаляемото е равно на сбора на разликата и умалителя. В случая $x = b + a$.

Пример 3. Да се намери неизвестното число x от равенството $x - 30 = 68$.
Решение: $x = 68 + 30$.

(4) Уравнение за неизвестен умалител ($a - x = b$)

Уравнението се решава, като се прилага правилото: умалителят е равен на разликата на умаляемото и разликата. В случая $x = a - b$.

Пример 4. Да се намери неизвестното число x от равенството $78 - x = 67$. Решение: $x = 78 - 67$.

(5) Уравнение за неизвестен първи множител ($x \cdot a = b$)

Уравнението се решава, като се прилага правилото: първият множител е равен на частното на произведението и втория множител. В случая $x = b : a$.

Пример 5. Да се намери неизвестното число x от равенството $x \cdot 12 = 96$. Решение: $x = 96 : 12$.

(6) Уравнение за неизвестен втори множител ($a \cdot x = b$)

Уравнението се решава, като се прилага правилото: вторият множител е равен на частното на произведението и първия множител. В случая $x = b : a$.

Пример 6. Да се намери неизвестното число x от равенството $8 \cdot x = 96$. Решение: $x = 96 : 8$.

(Забележка. От математическа гледна точка умножението на естествени числа е комутативна операция и уравненията от пети и шести вид са еквивалентни (неразличими), но по методически причини ние предпочитаме да ги разглеждаме като различни видове.)

(7) Уравнение за неизвестно делимо ($x : a = b$)

Уравнението се решава, като се прилага правилото: делимото е равно на произведението на частното и делителя. В случая $x = b \cdot a$.

Пример 7. Да се намери неизвестното число x от равенството $x : 7 = 12$. Решение: $x = 12 \cdot 7$.

(8) Уравнение за неизвестен делител ($a : x = b$)

Уравнението се решава, като се прилага правилото: делителят е равен на резултата от делението на делимото и частното. В случая $x = a : b$.

Пример 8. Да се намери неизвестното число x от равенството $78 : x = 6$. Решение: $x = 78 : 6$.

Дясната страна на всяко от осемте уравнения е конкретно (дадено) число, а лявата е израз, съставен от едно конкретно (дадено) число (a) и едно неизвестно число (x), свързани с една от операциите събиране (+), изваждане (−), умножение (·) или деление (:). Всяко от уравненията се решава, като се прилага правилото за намиране на съответния неизвестен компонент.

3. Съставни аритметични уравнения

На основата на елементарните (основните) аритметични уравнения могат да се образуват съставни аритметични уравнения. Но преди да покажем как точно може да стане това, нека всяко от елементарните уравнения (1), (2), (3), (4), (5), (6), (7), (8) наречем още **уравнение с едно действие**.

Ако в едно от уравнения от (1) до (8) на мястото на неизвестното x поставим всеки от изразите от вида: $x + a, a + x, x - a, a - x, x \cdot a, a \cdot x, x : a, a : x$, то ще получим нови 8 (вида) уравнения.

Например, ако вземем уравнението (1) $x + a_1 = b$ и на мястото на x поставим въпросните изрази, ще получим следните видове уравнения:

$$(x + a) + a_1 = b; (a + x) + a_1 = b; (x - a) + a_1 = b; (a - x) + a_1 = b;$$

$$(x \cdot a) + a_1 = b; (a \cdot x) + a_1 = b; (x : a) + a_1 = b; (a : x) + a_1 = b.$$

Всяко от последните 8 (вида) уравнения можем да наречем **уравнение с две действия**. Ако направим така с всяко от уравнения от (1) до (8), ще получим 64 (вида) уравнения с две действия.

Пример за уравнение с две действия.

Нека е дадено елементарното (с едно действие) уравнение $x : 5 = 12$ и изразът $45 + x$. След като на мястото на x в уравнението $x : 5 = 12$ поставим израза $45 + x$, получаваме уравнението $(45 + x) : 5 = 12$.

Ако в едно от 64-те вида уравнения с две действия на мястото на неизвестното x поставим всеки един от изразите: $x + a, a + x, x - a, a - x, x \cdot a, a \cdot x, x : a, a : x$, то ще получим нови 64 (вида) уравнения.

Например, ако вземем уравнението $(a_1 : x) + a_2 = b$ и на мястото на x поставим въпросните изрази, ще получим следните (видове) уравнения:

$$(a_1 : (x + a)) + a_2 = b; (a_1 : (a + x)) + a_2 = b; (a_1 : (x - a)) + a_2 = b;$$

$$(a_1 : (a - x)) + a_2 = b; (a_1 : (x \cdot a)) + a_2 = b; (a_1 : (a \cdot x)) + a_2 = b;$$

$$(a_1 : (x : a)) + a_2 = b; (a_1 : (a : x)) + a_2 = b.$$

Всяко от последните 8 (вида) уравнения можем да наречем **уравнение с три действия**. Ако направим така с всяко от уравненията от 64-те (вида) уравнения с две действия, ще получим 512 (64.8) вида уравнения с три действия.

Пример за уравнение с три действия.

Нека е дадено уравнението с две действия $(45 + x) : 5 = 12$ и изразът $80 - x$. След като на мястото на x в уравнението $(45 + x) : 5 = 12$ поставим израза $80 - x$, получаваме уравнението $(45 + (80 - x)) : 5 = 12$.

Следвайки горния образец за съставяне на аритметичните уравнения, от 512-те вида аритметични уравнения с три действия можем да получим 4096 (512.8) вида уравнения с четири действия. Ясно е, че всяко допълнително действие води до нарастване на броя на видовете аритметични уравнения „със скоростта“ на геометрична прогресия с частно 8. Този подход позволява да се генерира „огромна“ колекция от различни по вид аритметични уравнения. Всяка задача за решаване на аритметично уравнение има точно определена степен на сложност и тя зависи от броя на действията в лявата страна на равенството.

За да бъде решено едно аритметично уравнение, е достатъчно да се познават правилата за намиране на неизвестните компоненти и правилно да се формулират задачите-компоненти, които по същество са „обобщени“ уравнения с едно действие.

Ще бъдем по-ясни в следващите редове и ще разгледаме няколко примера за решаване на съставни аритметични уравнения по метода на неизвестния компонент.

Задача 1. Да се намери неизвестното число от равенството $(45 + x) : 5 = 12$.

Решение. В случая имаме уравнение с две действия. При решаване на уравнението по метода на неизвестния компонент отначало изразът в скобите $45 + x$ се разглежда като неизвестно и уравнението се интерпретира като уравнение за неизвестно делимо (първа задача-компонента).

След като от равенството $(45 + x) : 5 = 12$ бъде намерено неизвестното $45 + x$ по правилото за неизвестно делимо ($60 = 12 \cdot 5$), то уравнението се „преобразува“ в уравнение за неизвестно второ събираемо (втора задача-компонента).

След като от равенството $45 + x = 60$ бъде намерено неизвестното x по правилото за намиране на второ събираемо ($15 = 60 - 45$), уравнението е решено.

Стъпките на решението могат да се представят накратко така:

$$\begin{aligned}(45 + x) : 5 &= 12 \\ 45 + x &= 60 \\ x &= 15\end{aligned}$$

Задача 2. Да се намери неизвестното число от равенството $(45 + x) : 5 = 12$.

Решение. В случая имаме уравнение с три действия. При решаване на уравнението по метода на неизвестния компонент отначало изразът във външните скоби $45 + (80 - x)$ се разглежда като неизвестно и уравнението се интерпретира като уравнение за неизвестно делимо (първа задача-компонента).

След като от равенството $(45 + (80 - x)) : 5 = 12$ бъде намерено неизвестното $45 + (80 - x)$ по правилото за неизвестно делимо ($60 = 12 \cdot 5$), уравнението се „преобразува“ в уравнение за неизвестно второ събираемо (втора задача-компонента).

След като от равенството $45 + (80 - x) = 60$ бъде намерено неизвестното $80 - x$ по правилото за намиране на второ събираемо ($15 = 60 - 45$), уравнението се „преобразува“ в уравнение за неизвестен умалител (трета задача-компонента).

След като от равенството $80 - x = 15$ бъде намерено неизвестното x по правилото за намиране на неизвестен умалител ($65 = 80 - 15$), уравнението е решено.

Стъпките на решението могат да се представят накратко така:

$$\begin{aligned}(45 + (80 - x)) : 5 &= 12 \\ (45 + (80 - x)) &= 60 \\ 80 - x &= 15 \\ x &= 65\end{aligned}$$

Задача 3. Да се намери неизвестното число x от равенството:

$$((90 - (((100 - (x \cdot 4)) : 7) + 76) : 5)) : 2) - 27 = 10.$$

Решение. В случая имаме уравнение с осем действия. Решението ще придружим и с проверка, за да може да се направи сравнение и на „техниката“ при търсене на неизвестното число и при извършване на проверката. (При търсене на стойността на неизвестното число скобите се „изтриват“ последователно от вън навътре, докато при проверката скобите се „изтриват“ последователно от вътре навън.)

Стъпките на решението могат да се представят накратко така:

$$((90 - (((100 - (x \cdot 4)) : 7) + 76) : 5)) : 2) - 27 = 10$$

$$(90 - (((100 - (x \cdot 4)) : 7) + 76) : 5)) : 2 = 37$$

$$90 - (((100 - (x \cdot 4)) : 7) + 76) : 5 = 74$$

$$(((100 - (x \cdot 4)) : 7) + 76) : 5 = 16$$

$$((100 - (x \cdot 4)) : 7) + 76 = 80$$

$$(100 - (x \cdot 4)) : 7 = 4$$

$$100 - (x \cdot 4) = 28$$

$$x \cdot 4 = 72$$

$$x = 18$$

Проверка

$$((90 - (((100 - (18 \cdot 4)) : 7) + 76) : 5)) : 2) - 27 =$$

$$= ((90 - (((100 - 72) : 7) + 76) : 5)) : 2) - 27 =$$

$$= (90 - (((28 : 7) + 76) : 5)) : 2) - 27 =$$

$$= ((90 - ((4 + 76) : 5)) : 2) - 27 =$$

$$= ((90 - (80 : 5)) : 2) - 27 =$$

$$= ((90 - 16) : 2) - 27 =$$

$$= (74 : 2) - 27 =$$

$$= 37 - 27 =$$

$$= 10$$

4. Взаимно еднозначно съответствие между елементарните аритметични уравнения и елементарните аритметични преобразувания

В тази точка ще покажем, че всяко елементарно аритметично уравнение може да бъде моделирано с елементарно аритметично преобразувание. За целта е достатъчно да покажем, че има взаимно еднозначно съответствие (биективно изображение) между елементарните аритметични уравнения и елементарните аритметични преобразувания.

За целта отначало ще разгледаме възможността за моделиране на елементарните аритметични изрази (изрази с една аритметична операция и на една променлива)

чрез аритметични преобразувания.

Съответствието между елементарните аритметични изрази и елементарните аритметични преобразувания е показано в таблица 1.

**Съответствие между елементарните аритметични изрази
и елементарните аритметични преобразувания**

Аритметичен израз с една операция	Елементарно аритметично преобразувание
Сбор на променливата x и константа a $x + a$	Събиране на a $+a$ →
Сбор на константа a и променлива x $a + x$	Събиране към a $a+$ →
Разлика на променлива x и константа a $x - a$	Изваждане на a $-a$ →
Разлика на константа a и променлива x $a - x = b$	Изваждане от a $a-$ →
Произведение на променлива x и константа a $x \cdot a = b$	Умножение на a $\cdot a$ →
Произведение на константа a и променлива x $a \cdot x = b$	Умножение с a $a \cdot$ →
Частно на променлива x и константа a $x : a = b$	Деление на a $:a$ →
Частно на константа a и променлива x $a : x = b$	Деление от a $a:$ →

Таблица 1

Съответствието между елементарните алгебрични изрази и елементарните аритметични преобразувания дава възможност за моделиране на елементарните аритметични уравнения с елементарни аритметични преобразувания. Тази възможност е показана в таблица 2.

Таблица за съответствието между елементарните аритметични уравнения и елементарните аритметични преобразувания

Аритметично уравнение	Аритметично преобразуване (с образ b)						
За неизвестно първо събираемо $x + a = b$	Събиране на a <table><tr><td></td><td>$+a$</td><td>b</td></tr><tr><td></td><td>$\rightarrow$</td><td></td></tr></table>		$+a$	b		$\rightarrow$	
	$+a$	b					
	$\rightarrow$						
За неизвестно второ събираемо $a + x = b$	Събиране към a <table><tr><td></td><td>$a+$</td><td>b</td></tr><tr><td></td><td>$\rightarrow$</td><td></td></tr></table>		$a+$	b		$\rightarrow$	
	$a+$	b					
	$\rightarrow$						
За неизвестно умаляемо $x - a = b$	Изваждане на a <table><tr><td></td><td>$-a$</td><td>b</td></tr><tr><td></td><td>$\rightarrow$</td><td></td></tr></table>		$-a$	b		$\rightarrow$	
	$-a$	b					
	$\rightarrow$						
За неизвестен умалител $a - x = b$	Изваждане от a <table><tr><td></td><td>$a-$</td><td>b</td></tr><tr><td></td><td>$\rightarrow$</td><td></td></tr></table>		$a-$	b		$\rightarrow$	
	$a-$	b					
	$\rightarrow$						
За неизвестен първи множител $x \cdot a = b$	Умножение на a <table><tr><td></td><td>$\cdot a$</td><td>b</td></tr><tr><td></td><td>$\rightarrow$</td><td></td></tr></table>		$\cdot a$	b		$\rightarrow$	
	$\cdot a$	b					
	$\rightarrow$						
За неизвестен втори множител $a \cdot x = b$	Умножение с a <table><tr><td></td><td>$a\cdot$</td><td>b</td></tr><tr><td></td><td>$\rightarrow$</td><td></td></tr></table>		$a\cdot$	b		$\rightarrow$	
	$a\cdot$	b					
	$\rightarrow$						
За неизвестно делимо $x : a = b$	Деление на a <table><tr><td></td><td>$:a$</td><td>b</td></tr><tr><td></td><td>$\rightarrow$</td><td></td></tr></table>		$:a$	b		$\rightarrow$	
	$:a$	b					
	$\rightarrow$						
За неизвестен делител $a : x = b$	Деление от a <table><tr><td></td><td>$a:$</td><td>b</td></tr><tr><td></td><td>$\rightarrow$</td><td></td></tr></table>		$a:$	b		$\rightarrow$	
	$a:$	b					
	$\rightarrow$						

Таблица 2

Таблицата показва, че на всяко елементарно уравнение съответства точно едно елементарно преобразувание и обратно.

Съответствието между уравнения и преобразувания може да бъде „продължено“ и в еднозначно обратимо съответствие между решенията и обратните преобразувания. Последното съответствие прави възможно решаването на конкретно уравнение да се извършва чрез обръщане (инверсия) на съответното преобразувание.

Решаването на елементарните уравнения чрез обръщане (инверсия) на съответните преобразувания е показано в таблица 3.

Решаване на елементарните аритметични уравнения чрез обръщане (инверсия) на съответните преобразувания

Решение на уравнението за	Обръщане (инверсия) на преобразуванието						
<i>Неизвестно първо събираемо</i> $x + a = b$ $x = b - a$	<i>Събиране на a</i> <table><tr><td>$\square$</td><td>$+a$ $\rightarrow$</td><td>b</td></tr><tr><td></td><td>$-a$ $\leftarrow$</td><td>b</td></tr></table> <i>Изваждане на a</i>	$\square$	$+a$ $\rightarrow$	b		$-a$ $\leftarrow$	b
$\square$	$+a$ $\rightarrow$	b					
	$-a$ $\leftarrow$	b					
<i>Неизвестно второ събираемо</i> $a + x = b$ $x = b - a$	<i>Събиране към</i> <table><tr><td>$\square$</td><td>$a+$ $\rightarrow$</td><td>b</td></tr><tr><td></td><td>$-a$ $\leftarrow$</td><td>b</td></tr></table> <i>Изваждане на a</i>	$\square$	$a+$ $\rightarrow$	b		$-a$ $\leftarrow$	b
$\square$	$a+$ $\rightarrow$	b					
	$-a$ $\leftarrow$	b					
<i>Неизвестно умаляемо</i> $x - a = b$ $x = b + a$	<i>Изваждане на a</i> <table><tr><td>$\square$</td><td>$-a$ $\rightarrow$</td><td>b</td></tr><tr><td></td><td>$+a$ $\leftarrow$</td><td>b</td></tr></table> <i>Събиране на a</i>	$\square$	$-a$ $\rightarrow$	b		$+a$ $\leftarrow$	b
$\square$	$-a$ $\rightarrow$	b					
	$+a$ $\leftarrow$	b					
<i>Неизвестен умалител</i> $a - x = b$ $x = a - b$	<i>Изваждане от a</i> <table><tr><td>$\square$</td><td>$a-$ $\rightarrow$</td><td>b</td></tr><tr><td></td><td>$a-$ $\leftarrow$</td><td>b</td></tr></table> <i>Изваждане от a</i>	$\square$	$a-$ $\rightarrow$	b		$a-$ $\leftarrow$	b
$\square$	$a-$ $\rightarrow$	b					
	$a-$ $\leftarrow$	b					
<i>Неизвестен първи множител</i> $x \cdot a = b$ $x = b : a$	<i>Умножение на a</i> <table><tr><td>$\square$</td><td>$\cdot a$ $\rightarrow$</td><td>b</td></tr><tr><td></td><td>$:a$ $\leftarrow$</td><td>b</td></tr></table> <i>Деление на a</i>	$\square$	$\cdot a$ $\rightarrow$	b		$:a$ $\leftarrow$	b
$\square$	$\cdot a$ $\rightarrow$	b					
	$:a$ $\leftarrow$	b					
<i>Неизвестен втори множител</i> $a \cdot x = b$ $x = b : a$	<i>Умножение с a</i> <table><tr><td>$\square$</td><td>$a \cdot$ $\rightarrow$</td><td>b</td></tr><tr><td></td><td>$:a$ $\leftarrow$</td><td>b</td></tr></table> <i>Деление на a</i>	$\square$	$a \cdot$ $\rightarrow$	b		$:a$ $\leftarrow$	b
$\square$	$a \cdot$ $\rightarrow$	b					
	$:a$ $\leftarrow$	b					

Неизвестно делимо $x : a = b$ $x = b \cdot a$	Деление на a <table><tr><td>$\square$</td><td>$:a$ $\rightarrow$</td><td>b</td></tr><tr><td></td><td>$.a$ $\leftarrow$</td><td>b</td></tr></table> Умножение на a	$\square$	$:a$ $\rightarrow$	b		$.a$ $\leftarrow$	b
$\square$	$:a$ $\rightarrow$	b					
	$.a$ $\leftarrow$	b					
Неизвестен делител $a : x = b$	Деление от a <table><tr><td>$\square$</td><td>$a:$ $\rightarrow$</td><td>b</td></tr><tr><td></td><td>$a:$ $\leftarrow$</td><td>b</td></tr></table> Деление от a	$\square$	$a:$ $\rightarrow$	b		$a:$ $\leftarrow$	b
$\square$	$a:$ $\rightarrow$	b					
	$a:$ $\leftarrow$	b					

Таблица 3

Извод. Беше показано, че между елементарните аритметични уравнения и елементарните аритметични преобразувания съществува биективно изображение, което може да бъде „продължено“ като биективно изображение между решенията на елементарните аритметични уравнения и обратните аритметични преобразувания. Този факт ни позволява да наречем изображението изоморфизъм между елементарните аритметични уравнения и елементарните аритметични преобразувания.

Изоморфизмът между уравненията и преобразуванията позволява уравненията да бъдат моделирани с преобразувания, а техните решения да бъдат намирани чрез обръщане на преобразуванията, т.е. по **метода на инверсията**.

По-долу ще разгледаме три примера на елементарни уравнения, решенията на които са получени по метода на инверсията.

Задача 1. Да се намери неизвестното число x от равенството:

$$45 - x = 12$$

Решение

Уравнението $45 - x = 12$ замества (моделираме) чрез аритметичното преобразуване *изваждане от 45*. Обръщаме преобразуванието, извършваме съответното аритметично действие и намираме неизвестното число.

Решението е показано на диаграмата

$\square$	$45-$ $\rightarrow$	12
33	$45-$ $\leftarrow$	12

Задача 2. Да се намери неизвестното число x от равенството:

$$14 \cdot x = 98$$

Решение

Уравнението $14 \cdot x = 98$ замества (моделираме) с преобразуването *умножение с 14*. Обръщаме преобразуването, извършваме съответното аритметично действие и намираме неизвестното число.

Решението е показано на диаграмата

$\square$	$14 \cdot$ $\rightarrow$	98
7	$:14$ $\leftarrow$	98

Задача 3. Да се намери неизвестното число x от равенството:

$$14 + x = 96$$

Решение

Уравнението $14 + x = 96$ замества (моделираме) с преобразуването *събиране към 14*. Обръщаме преобразуването, извършваме съответното аритметично действие и намираме неизвестното число.

Решението е показано на диаграмата

$\square$	$14 +$ $\rightarrow$	96
82	-14 $\leftarrow$	96

5. Метод на инверсията (обръщането) за решаване на съставни аритметични уравнения

Както вече беше казано, наличието на взаимно еднозначно съответствие между елементарните аритметични уравнения и елементарните аритметични преобразувания позволява всяко аритметично уравнение да бъде моделирано с аритметично преобразуване. В случай че аритметичното уравнение е съставно, то неговият модел е аритметично преобразуване, което е композиция от елементарни преобразувания.

В тази точка чрез представителни примери ще покажем как съставното аритметично уравнение може да бъдат моделирано с композиция на елементарни аритметични уравнения и по този начин да бъде решено по метода на инверсията.

Да започнем с аритметично уравнение с две операции.

Задача 1. Да се реши уравнението: $(45 + x) : 5 = 12$.

Решение. В израза $(45 + x) : 5$ в лявата страна на уравнението участват две действия – събиране и деление в този ред. Това означава, че на този израз съответства композиция на 2 аритметични преобразувания – *събиране към 45* и *деление на 5* в този ред. С други думи, изразът $(45 + x) : 5$ се моделира със следната „верижка“ от квадратчета и стрелки

	45+		:5
	→		→

Тогава на уравнението $(45 + x) : 5 = 12$ отговаря „верижката“:

□	45+	□	:5	12
	→		→	

За да намерим решението на уравнението, достатъчно е да „обърнем“ верижката, т.е. да изпълним обратните преобразувания в обратен ред.

С други думи, на решението отговаря „обърнатата“ верижка:

□	-45	□	.5	12
	←		←	

В последната „верижка“ преобразуванията могат да бъдат извършени, в резултат на което да бъдат запълнени празните квадратчета, включително и първото квадратче, както е показано

15	-45	60	.5	12
	←		←	

По-компактно решението на задачата може да бъде представено така:

□	+45	□	:5	12
	→		→	
15	-45	60	.5	12
	←		←	

С това неизвестното число x е намерено ($x = 15$) и задачата е решена.

В следващите примери ще представим метода на инверсията чрез решенията на три съставни уравнения с повече от две действия.

Задача 2. Да се реши уравнението:

$$((90 - (((100 - (x \cdot 4)) : 7) + 76) : 5)) : 2) - 27 = 10.$$

(Уравнението беше решено по метода на неизвестния компонент, но тук ще представим решението по метода на инверсията.)

Решение. Построяването на модела на уравнението започва с квадратчето за неизвестното x . Това квадратче на този етап е празно. Следващото квадратче е за преобразуването *умножение на 4*, породено от действието в най-вътрешните скоби $(x \cdot 4)$. Следващото (третото) квадратче на „верижката“ оставяме празно (за резултата от първото преобразуване). Следващото (четвъртото) квадратче от верижката е за преобразуването *изваждане от 100*, породено от действието в следващата двойка скоби $(100 - (x \cdot 4))$...

Този процес продължава, докато достигнем преобразуването *изваждане на 27*, породено от действието извън най-външната двойка скоби. Последното квадратче на верижката е за резултата от последното преобразуване (*изваждане на 27*), т. е. за числото 10 в дясната страна на уравнението.

Така получаваме „верижката“ от преобразувания, която е модел на уравнението.

Модел на уравнението

□	.4 →		100– →		:7 →		+76 →		:5 →		90– →		:2 →		–27 →	10
---	---------	--	-----------	--	---------	--	----------	--	---------	--	----------	--	---------	--	----------	----

За да намерим решението, „обръщаме“ верижката и извършваме обратните преобразувания в обратен ред.

Процесът на решаване е показан в следващата верижка.

Модел на решението

18	:4 ←	72	100– ←	28	.7 ←	4	–76 ←	80	.5 ←	16	90– ←	74	.2 ←	37	+27 ←	10
----	---------	----	-----------	----	---------	---	----------	----	---------	----	----------	----	---------	----	----------	----

За по-компактен запис моделът на уравнението и моделът на решението могат да бъдат представени в една таблица с два реда:

□	.4 →		80– →		.3 →		90– →		72: →		+38 →		:5 →		–27 →	10
18	:4 ←	72	100– ←	28	.7 ←	4	–76 ←	80	.5 ←	16	90– ←	74	.2 ←	37	+27 ←	10

Отговор: $x = 18$.

Задача 3. Да се намери неизвестното число x от равенството:

$$(((72 : (90 - ((80 - (x \cdot 4)) \cdot 3))) + 38) : 5) \cdot 10 = 100.$$

Решение

□	.4 →		80- →		.3 →		90- →		72: →		+38 →		:5 →		-27 →	100
13	:4 ←	52	80- ←	28	:3 ←	84	90- ←	6	72: ←	12	-38 ←	50	.5 ←	10	:10 ←	100

Отговор: $x = 13$.

Задача 4. Да се намери неизвестното число x от равенството:

$$((18 - (((80 - (x \cdot 3)) + 45) : 10) \cdot 15) - 65) \cdot 12 + 4 = 100$$

Решение

□	.3 →		80- →		+45 →		:10 →		.15 →		-65 →		18- →		.12 →		+4 →	100
25	:3 ←	75	80- ←	5	-45 ←	50	:10 ←	5	:15 ←	75	+65 ←	10	18- ←	8	:12 ←	96	-4 ←	100

Отговор: $x = 25$.

Заклучителни бележки

В заключителните бележки ще направим кратки методически коментари на представените методи за решаване на аритметичните уравнения.

Коментар 1. По метода на намиране на неизвестния компонент решаването на аритметичното уравнение с n действия се свежда до неговото последователно редуциране в редица от уравнения, съответно с $n-1$, $n-2$, ..., 2, 1 действия. Образно казано, структурата на аритметичното уравнение е **концентрична** и напомня структурата на играта „Матрьошка“. При конструиране на съставно аритметично уравнението „кутията“ с неизвестното x се поставя в друга „кутия“, която пък, от своя страна, се поставя в трета „кутия“ и т.н. Това означава, че при съставяне на уравнението скобите се „затварят“ последователно от вътре навън и „придвижването“ се осъществява от „центъра към периферията“. Докато при решаване на съставното уравнение скобите се „отварят“ последователно точно в обратен ред – от вън навътре, т.е. „придвижването“ се осъществява от „периферията към центъра“.

Коментар 2. Решението на уравнението по метода на аритметичните преобразувания (инверсията) преминава през два етапа. Първият етап се състои в построяване на модела („верижката“) на уравнението. Вторият етап се изразява в прилагане на инверсията (обръщане на „верижката“ и преобразуване на модела). При първия етап (построяване на модела) „кутията“ на задачата с неизвестното се отваря последователно „от вътре навън“ и структурата на уравнението се „линеализира“. При преобразуване на модела „придвижването“ става **линейно**, на принципа „едно след друго“, от края към началото. Друго предимство на метода на инверсията е, че не е необходимо да се помнят правилата за намиране на неизвестен компонент. (За сметка на правилата за намиране на неизвестен компонент е необходимо да се познават обратните аритметични преобразувания.) В известен смисъл може да се каже, че методът на инверсията е по-рационален и има по-ниска степен на абстракция от метода на неизвестния компонент.

Нашето мнение е, че и двата подхода за търсене на решения на задачите от разгледания клас уравнения имат своето място в началната училищна математика. Включването им в математическата и методическата подготовката на началните учители създава предпоставки и може да осигури целенасочено изучаване и успешно овладяване на методите за решаване на аритметични уравнения и от страна на техните ученици.

ЛИТЕРАТУРА

- Върбанова, М. (2013). *Структурно-функционално моделиране в началната училищна математика*, Пловдив: Астарта.
- Лалчев, З., Върбанова, М. (2014). Инверсията – метод в началната училищна математика. *Математика и информатика*, 57 (3), 215 – 246.
- Лалчев, З. (2009). *Математика в задачи и методи. Книга 2. За учителя в началните класове*. София: Университетско издателство „Св. Климент Охридски“.
- Lalchev, Z., Varbanova, M. & Voutova, I. (2005). *Equations or transformations in primary school mathematics?*, Proceedings of the 4th Mediterranean Conference on Mathematics Educations MEDCONF 2005, 355 – 364.

REFERENCES

- Върбанова, М. (2013). *Структурно-функционално моделиране в началната училищна математика*, Пловдив: Астарта.
- Лалчев, З., Върбанова, М. (2014). Инверсията – метод в началната училищна математика. *Математика и информатика*, 57 (3), 215 – 246.
- Лалчев, З. (2009). *Математика в задачи и методи. Книга 2. За учителя в началните класове*. София: Университетско издателство „Св. Климент Охридски“.

Lalchev, Z., Varbanova, M. & Voutova, I. (2005). *Equations or transformations in primary school mathematics?*, Proceedings of the 4th Mediterranean Conference on Mathematics Educations MEDCONF 2005, 355 – 364.

TWO APPROACHES TO STUDY EQUATIONS IN PRIMARY SCHOOL MATHEMATICS

Abstract. The authors initiate the idea of arithmetical equation and draw a mathematical and didactical parallel between the traditional method of the unknown component and the method of arithmetical transformations (the inversion method) for solving arithmetical equations in primary school mathematics.

✉ **Prof. Dr. Zdravko Lalchev**

Faculty of Preschool and Primary Education
University of Sofia
69A, Shipchenski prohod Blvd.
1574 Sofia, Bulgaria
E-mail: zdravkol@abv.bg

✉ **Prof. Dr. Margarita Varbanova**

Faculty of Mathematics and Informatics
University of VelikoTarnovo
3A, Arh. G. Kozarev Blvd.
5000 VelikoTarnovo, Bulgaria
E-mail: mvarbanova11@abv.bg

✉ **Dr. Irina Voutova, Assist. Prof.**

Faculty of Mathematics and Informatics
University of Sofia
5, James Boucher Blvd.
1164 Sofia, Bulgaria
E-mail: irinazv@abv.bg