

ДОПИРАТЕЛНИ ОКРЪЖНОСТИ, ПОРОДЕНИ ОТ ИНЦИДЕНТНИ ТОЧКА И ПРАВА

Сава Гроздев, Веселин Ненков

Резюме. Разгледани са твърдения, свързани с обобщението на една от задачите от Международната олимпиада по математика през 2011 г. Обърнато е специално внимание на доказателствата, като за опростяване на изчисленията са използвани инверсия и подходяща точка на Микел.

Keywords: THE GEOMETER'S SKETCHPAD (GSP), triangle, circle, tangent point, Miquel point.

Съществуват математически твърдения, в които при вникване в детайлите от различни гледни точки се получават различни съдържателни обобщения. Освен това се забелязват нови свойства на добре известни обекти. Подходящ пример за такова твърдение е следната задача от 52-та международна математическа олимпиада през 2011 г.: *Нека l е допирателна към описаната окръжност Γ на остроъгълен триъгълник ABC . С l_a , l_b и l_c са означени симетричните прави на l съответно спрямо правите BC , CA и AB . Да се докаже, че описаната окръжност около триъгълника, образуван при пресичането на правите l_a , l_b и l_c , се допира до Γ .* (Гроздев, 2011)

Едно обобщение, в което е определена една забележителна точка за $\triangle ABC$, зависеща от произволна описана за $\triangle ABC$ крива от втора степен, е направено в (Гроздев & Ненков, 2012). Тук ще разгледаме друго, по-различно обобщение на същата задача. За целта в началото ще отбележим друга нейна формулировка. Във връзка с това ще припомним две свойства на ортоцентъра H на $\triangle ABC$.

Нека k_a , k_b и k_c са описаните окръжности съответно за триъгълниците BCH , CAH и ABH . Ще потърсим някои връзки на тези окръжности с произволна допирателна l за Γ .

1) Симетричната точка на H спрямо правата BC лежи върху Γ (Паскалев & Чобанов, 1985). Следователно окръжността, симетрична на k_a спрямо BC , е

Γ . Затова, при симетрия спрямо BC , допирателната l на Γ се преобразува в допирателна l_a към k_a . По аналогичен начин забелязваме, че правите l_b и l_c , симетрични на l съответно спрямо CA и AB , са допирателни съответно към k_b и k_c .

2) Ако s е произволна права през H , а правите s_a , s_b и s_c са симетричните образи на s съответно спрямо правите BC , CA и AB , то s_a , s_b и s_c минават през точка P от Γ (Шарыгин, 1986) и (Прасолов, 1986). Затова при симетрия спрямо BC точката P се преобразува във втората пресечна точка H_a на k_a и s . Следователно, ако l е допирателната на Γ в точката P ($P = s_a \cap l$), правата l_a е допирателна на k_a в точката H_a . Аналогично установяваме, че ако вторите пресечни точки на s с k_b и k_c са съответно H_b и H_c , правите l_b и l_c се допират съответно до k_b и k_c в H_b и H_c .

От направените наблюдения следва, че олимпиадната задача може да се формулира по следния по-различен начин:

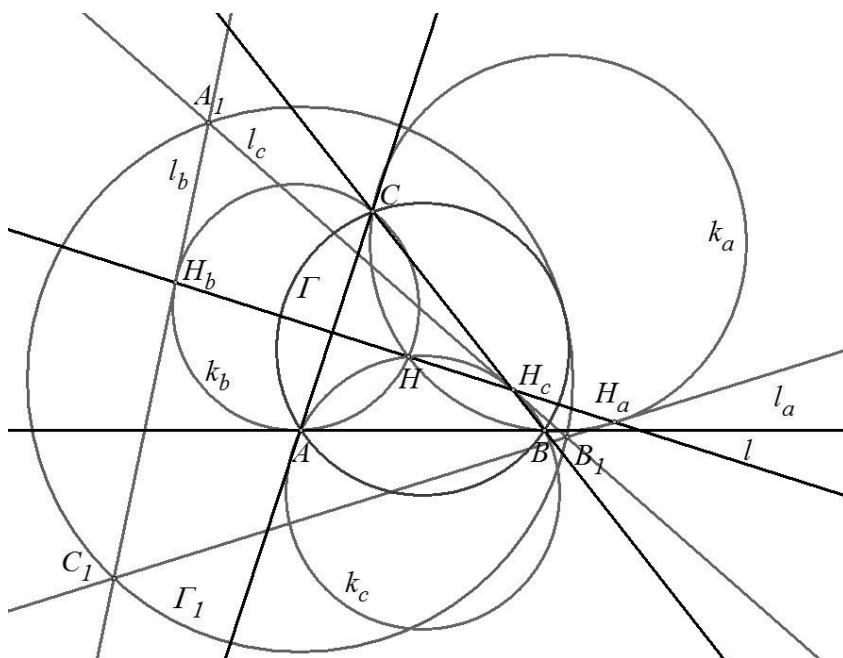
Твърдение 1. Нека H е ортоцентърът на не правоъгълен триъгълник ABC с описана окръжност Γ , а k_a , k_b и k_c са описаните окръжности съответно за триъгълниците BCH , CAH и ABH . Права l през H пресича тези окръжности за втори път съответно в точките H_a , H_b и H_c . Ако правите l_a , l_b и l_c са допирателни към k_a , k_b и k_c съответно в точките H_a , H_b и H_c , то описаната окръжност около триъгълника, образуван при пресичането на l_a , l_b и l_c , се допира до Γ .

Забележка: Във формулировката на твърдение 1 сме се отказали от ограничението $\triangle ABC$ да е остроъгълен, но сме наложили друго – да не е правоъгълен. Ако $\angle ACB = 90^\circ$, то $H \equiv C$, а k_a и k_b не са определени с три различни точки. Затова изключваме правоъгълните триъгълници.

Сега по естествен начин възниква следният въпрос: Какво ще се случи, ако ортоцентърът H се замени с произволна точка H в равнината на произволен триъгълник ABC ? Тук можем да ускорим придвижването от зададения въпрос до получаване на неговия отговор във вид на хипотеза, като използваме конструктивните и динамични възможности на програмата „THE GEOMETER’S SKETCHPAD” (GSP). Наблюденията с GSP показват, че твърдение 1 остава вярно и при произволна точка H . Като вземем предвид забележката към твърдение 1, лесно съобразяваме, че ако точката H лежи върху някоя от правите BC , CA и AB или върху Γ , разглежданата конструкция не е коректна. Така вече можем

да формулираме обобщение на твърдение 1, а следователно и на олимпиадната задача, в следния вид:

Твърдение 2. Нека H е точка от равнината на триъгълник ABC с описана окръжност Γ , която не лежи върху BC , CA , AB и Γ , а k_a , k_b и k_c са описаните окръжности съответно за триъгълниците BCH , CAH и ABH . Права l през H пресича тези окръжности за втори път съответно в точките H_a , H_b и H_c . Ако правите l_a , l_b и l_c са допирателни към k_a , k_b и k_c съответно в точките H_a , H_b и H_c , то описаната окръжност Γ_1 около триъгълника, образуван при пресичането на l_a , l_b и l_c , се допира до Γ . (Фиг. 1)

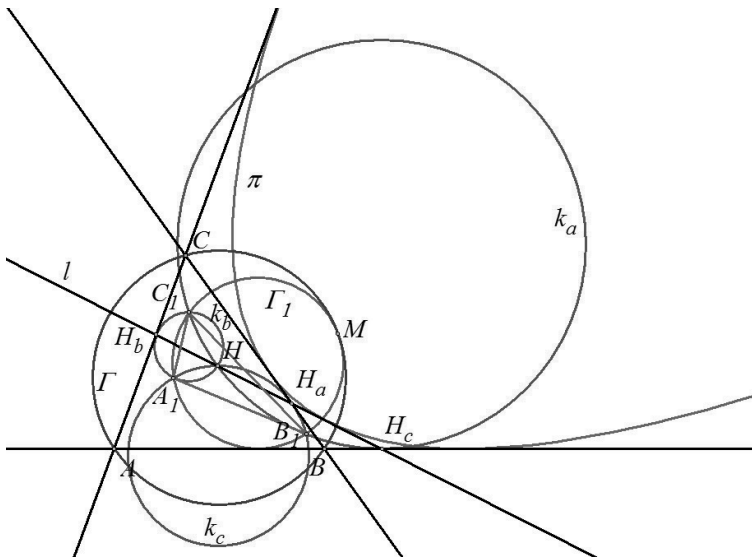


Фиг. 1

Тъй като точката H и правата l през нея са произволни, аналитичните подходи за доказателство на твърдение 2 водят до прекалено големи усложнения в пресмятанията и получаваните чрез тях резултати. Затова е по-добре да използваме индиректен подход при доказателството на твърдение 1, подход, при който някои от пресмятанията могат да се опростят съществено.

Разглеждаме инверсия i с полюс H и степен r^2 ($r \in \mathbb{R}^+$). При тази инверсия окръжностите k_a , k_b и k_c се преобразуват съответно в правите k'_a , k'_b и k'_c , неминаващи през H , а правата l – в себе си. Тъй като $k_b \cap k_c = A \neq H$, $k_c \cap k_a = B \neq H$ и $k_a \cap k_b = C \neq H$, то при i тези точки се преобразуват съответно в $A' = k'_b \cap k'_c$, $B' = k'_c \cap k'_a$ и $C' = k'_a \cap k'_b$, т.е. $k'_a \equiv B'C'$, $k'_b \equiv C'A'$ и $k'_c \equiv A'B'$. Следователно при i точките $H_a = l \cap k_a$, $H_b = l \cap k_b$ и $H_c = l \cap k_c$ се преобразуват съответно в точките $H'_a = l \cap B'C'$, $H'_b = l \cap C'A'$ и $H'_c = l \cap A'B'$, т.е. H'_a , H'_b и H'_c са пресечните точки на l с правите, образуващи триъгълника $A'B'C'$. Инверсните образи на допирателните l_a , l_b и l_c са съответно окръжностите l'_a , l'_b и l'_c , минаващи през H и допиращи се съответно до $B'C'$, $C'A'$ и $A'B'$ в точките H'_a , H'_b и H'_c . Следователно образът на Γ_1 е окръжността Γ'_1 , минаваща през пресечните точки на l'_a , l'_b и l'_c , различни от H . Като вземем предвид тези наблюдения и променим означенията, инверсията i преобразува твърдение 2 в следното:

Твърдение 3. Дадени са триъгълник ABC с описана окръжност Γ , точка H и права l през H , неминаваща през никой от върховете на ABC . Окръжностите k_a , k_b и k_c са такива, че съдържат H и се допират съответно до BC , CA и AB в точките $H_a = l \cap BC$, $H_b = l \cap CA$ и $H_c = l \cap AB$. Ако вторите пресечни точки на двойките окръжности (k_b, k_c) , (k_c, k_a) и (k_a, k_b) са съответно A_1 , B_1 и C_1 , то окръжността Γ_1 , описана около $\Delta A_1B_1C_1$, се допира до Γ . (Фиг. 2)



Фиг. 2

ствие 1, че аналитичните пресмятания да не бъдат свързани с прекалено сложни изчисления. За целта да вземем предвид, че до четирите прави BC , CA , AB и l се допира единствена парабола π , която има за фокус точката на Микел M (Ненков, 1999) (Фиг. 3). Така задачата за аналитичното определяне на основните обекти, участващи в условието на твърдение 3, може да се параметризира, както е показано в (Ненков, 1998).

Разглеждаме геометричната конфигурация, описана в твърдение 3, в комплексната равнина спрямо Гаусова координатна система, както това е показано на фиг. 3. Спрямо тази координатна система, както е показано в (Ненков, 1998), афиксът на произволна точка Z от параболата π , допираща се до правите AB , BC , CA и l , е $z = \frac{2p}{(1+t)^2}$, $|t| = 1$ (p е фокалният параметър на π). Нека допирните точки на правите AB , BC , CA и l с π се получават съответно при $t = t_1$, $t = t_2$, $t = t_3$ и $t = t_4$, допирната точка на втората допирателна през H се получава при $t = t_0$. Тогава от резултатите в (Ненков, 1998) се получават равенствата (афиксите на точките ще означаваме със съответните малки букви):

$$(1) \quad \begin{aligned} a &= \frac{2p}{(1+t_2)(1+t_3)}, & b &= \frac{2p}{(1+t_3)(1+t_1)}, & c &= \frac{2p}{(1+t_1)(1+t_2)}, \\ h &= \frac{2p}{(1+t_4)(1+t_0)}, & h_a &= \frac{2p}{(1+t_1)(1+t_4)}, & h_b &= \frac{2p}{(1+t_2)(1+t_4)}, & h_c &= \frac{2p}{(1+t_3)(1+t_4)}, \end{aligned}$$

където $|t_j| = 1$.

Преминаваме към определяне на центъра O_a на k_a . Тъй като k_a се допира до BC в H_a , то $O_a H_a \perp BC$ и затова е изпълнено равенството $(b-c)(\bar{o}_a - \bar{h}_a) + (\bar{b} - \bar{c})(o_a - h_a) = 0$ (Тонов, 1988). След като заместим необходимите резултати от (1) и извършим някои преобразувания, получаваме

$$(2) \quad \bar{o}_a - t_1 o_a = \frac{2pt_1(t_4 - 1)}{(1+t_1)(1+t_4)}.$$

Нека M_a е средата на HH_a . Тогава от (1) следва, че $m_a = \frac{p(2+t_0+t_1)}{(1+t_0)(1+t_1)(1+t_4)}$.

Тъй като O_a лежи върху симетралата на HH_a , изпълнено е равенството

$(h - h_a)(\bar{o}_a - \bar{m}_a) + (\bar{h} - \bar{h}_a)(o_a - m_a) = 0$ (Тонов, 1988). Сега от израза за m_a и

(1) получаваме

$$(3) \quad -\bar{o}_a + t_4 o_a = \frac{2pt_4(1-t_0t_1)}{(1+t_0)(1+t_1)(1+t_4)}.$$

От (2) и (3) имаме:

$$(4) \quad o_a = \frac{2p[t_1(t_4 - t_0 - 1) + t_4]}{(1+t_0)(1+t_1)(1+t_4)(t_4 - t_1)}, \quad \bar{o}_a = \frac{2pt_1t_4[t_0(t_4 - t_1 - 1) + t_4]}{(1+t_0)(1+t_1)(1+t_4)(t_4 - t_1)}.$$

Уравнението на k_a получаваме от равенството $|z - o_a|^2 = |h_a - o_a|^2$, което се записва още така: $z\bar{z} - \bar{o}_a z - o_a \bar{z} + \bar{o}_a h_a + o_a \bar{h}_a - h_a \bar{h}_a = 0$. След като използваме (1) и (4) за уравнението на k_a , намираме

$$(5) \quad k_a: \quad z\bar{z} - \frac{2pt_1t_4[t_4(1+t_0) - t_0(1+t_1)]}{(1+t_0)(1+t_1)(1+t_4)(t_4 - t_1)}z - \\ - \frac{2p[t_1(t_4 - t_0 - 1) + t_4]}{(1+t_0)(1+t_1)(1+t_4)(t_4 - t_1)}\bar{z} + \frac{4p^2t_1t_4(t_4 - t_0)}{(1+t_0)(1+t_1)(1+t_4)^2(t_4 - t_1)} = 0.$$

Уравненията на k_b и k_c се получават от уравнението (5) на k_a , като t_1 се замени съответно с t_2 и t_3 . След като извадим уравненията на k_a и k_b и извършим някои преобразувания, стигаме до равенството:

$$\bar{z} = -\frac{t_4^2[t_1t_2 - t_0(t_1 + t_2) + t_0t_4 + t_4 - t_0]}{(t_4 - t_0 - 1)t_1t_2 + t_4(t_1 + t_2) - t_0t_4}z + \frac{2pt_4(t_4 - t_0)(t_1t_2 + t_4)}{(1+t_4)[(t_4 - t_0 - 1)t_1t_2 + t_4(t_1 + t_2) - t_0t_4]}.$$

Заместваме последния израз в (5) и получаваме квадратното уравнение

$$\alpha z^2 + \beta z + \gamma = 0, \quad \text{където } \alpha = -\frac{t_4^2[t_1t_2 - t_0(t_1 + t_2) + t_0t_4 + t_4 - t_0]}{(t_4 - t_0 - 1)t_1t_2 + t_4(t_1 + t_2) - t_0t_4}, \\ \gamma = -\frac{4p^2t_4^2(t_1 - t_4)(t_0 - t_4)}{(1+t_0)(1+t_4)^2[(t_4 - t_0 - 1)t_1t_2 + t_4(t_1 + t_2) - t_0t_4]}, \text{ а } \beta \text{ е комплексно число,}$$

зависещо от t_0 , t_1 , t_2 и t_4 . Тъй като k_a и k_b се пресичат в точките H и C_1 , то корените на последното уравнение са h и c_1 . Сега от формулата на Виет за произведението на корените на едно квадратно уравнение, приложена към последното

$$\text{уравнение, следва, че } h.c_1 = \frac{\gamma}{\alpha} = \frac{4p^2(t_4 - t_0)}{(1+t_0)(1+t_4)^2[t_1t_2 - t_0(t_1+t_2) + t_0t_4 + t_4 - t_0]}.$$

След заместване на h от (1) окончателно получаваме

$$(6) \quad c_1 = \frac{2p(t_4 - t_0)}{(1+t_4)[t_1t_2 - t_0(t_1+t_2) + t_0t_4 + t_4 - t_0]}.$$

Аналогично на (6) стигаме до равенствата:

$$(7) \quad a_1 = \frac{2p(t_4 - t_0)}{(1+t_4)[t_2t_3 - t_0(t_2+t_3) + t_0t_4 + t_4 - t_0]},$$

$$b_1 = \frac{2p(t_4 - t_0)}{(1+t_4)[t_3t_1 - t_0(t_3+t_1) + t_0t_4 + t_4 - t_0]}.$$

Сега да определим уравнението на окръжността, минаваща през точките M , A_1 и B_1 от равенството $\frac{a_1 - z}{b_1 - z} \cdot \frac{a_1}{b_1} = \frac{\bar{a}_1 - \bar{z}}{\bar{b}_1 - \bar{z}} \cdot \frac{\bar{a}_1}{\bar{b}_1}$, като в него заместим (7). След извършване на необходимите преобразувания получаваме, че уравнението на описаната за ΔMA_1B_1 окръжност е следното:

$$(8) \quad \Gamma_1: \frac{(1+t_4)[(t_0 - t_4 + 1)t_1t_2t_3 - t_4(t_1t_2 + t_2t_3 + t_3t_1) + t_0t_4(t_1 + t_2 + t_3)]}{+2pt_1t_2t_3t_4(t_4 - t_0)}z\bar{z} + 2pt_4(t_4 - t_0)\bar{z} = 0.$$

След заместване на (6) в (8) установяваме, че точката C_1 лежи върху Γ_1 . Освен това в [6] е намерено уравнението на Γ във вида:

$$(9) \quad \Gamma: (1+t_1)(1+t_2)(1+t_3)z\bar{z} - 2pt_1t_2t_3z - 2p\bar{z} = 0.$$

Съвместното решаване на уравненията (8) и (9) води до единственото решение $z = 0$. Следователно Γ и Γ_1 се допират в точката на Микел M . С това твърдение 3 и следствие 1 са доказани.

Сега, като вземем предвид, че твърдение 2 е инверсно на твърдение 3, получаваме и неговото доказателство. Освен това от следствие 1 намираме:

Следствие 2. *Ако в твърдение 2 правата l е постоянна, то окръжностите Γ и Γ_1 се допират в постоянна точка за произволна точка H от l .*

Тук трябва да се отбележи, че постоянната точка в следствие 2, за разлика от следствие 1, не е характерната за тази геометрична конфигурация точка на Микел. Това се проверява непосредствено, като се направят необходимите построения в GSP.

Накрая е необходимо да отбележим, че намереното във връзка с твърдение 2, твърдение 3 и неговото следствие 1 ни предлага още едно свойство на точката на Микел, определена от четири прави в общо положение.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гроздев, С. (2011). Международна олимпиада по математика. *Математика плюс*, 3 (75), 56–59.
2. Гроздев, С. & Ненков, В. (2012). Една забележителна точка на триъгълника. *Математика и математическо образование*, 41, 330–337.
3. Ненков, В. (1998). Конични сечения, вписани в триъгълник. *Математика и информатика*, 5, 54 – 59.
4. Ненков, В. (1999). Парабола, вписана в триъгълник. *Математика и информатика*, 4, 61 – 65.
5. Паскалев, Г. & И. Чобанов. (1985). *Забележителни точки в триъгълника*. София: Народна просвета.
6. Прасолов, В. (1986). *Задачи по планиметрии. Част I*. Москва: Наука, 154, зад. 9.23.
7. Тонов, И. (1988). *Приложение на комплексните числа в геометрията*. София: Народна просвета.
8. Шарыгин, И. (1986). *Задачи по геометрии. Планиметрия*. Москва: Наука, 52, зад. 139.

✉ Сава Гроздев
професор, доктор по математика, доктор на педагогическите науки
Институт по математика и информатика – БАН
ул. „Акад. Г. Бончев“, бл. 8
1113 София, България
E-mail: sava.grozdev@gmail.com

Веселин Ненков Ненков
доктор по математика
Технически колеж Ловеч
ул. „Съйко Съев“ № 31
Ловеч
E-mail: vnenkov@mail.bg

TANGENT CIRCLES, GENERATED BY AN INCIDENT POINT AND A LINE

Abstract. Some assertions are considered in connection with the generalization of a problem from the International Mathematical Olympiad in 2011. Special notice is taken of the proofs. Inversion and a suitable Miquel point are used to simplify the computing process.

✉ Sava Grozdev

Professor, Doctor in Mathematics, DSc in Pedagogy

Institute of Mathematics and Informatics – BAS

Acad. G. Bonchev Street, bl. 8

1113 Sofia, Bulgaria

E-mail: sava.grozdev@gmail.com

Veselin Nenkov

Doctor in Mathematics

Technical College Lovech

31, Sajko Saev Street

Lovech

E-mail: vnenkov@mail.bg