

ДОКАЗАТЕЛСТВА И УТОЧНЕНИЯ НА ЕКСПЕРИМЕНТАЛНО ПОЛУЧЕНИТЕ ТВЪРДЕНИЯ ЧРЕЗ ПРИНЦИПА ЗА ДУАЛНОСТ

¹⁾Сава Гроздев, ²⁾Веселин Ненков

¹⁾ Висше училище по застраховане и финанси – София

²⁾ Технически колеж – Ловеч

Резюме. В статията са доказани свойствата, които характеризират геометричните конструкции, описани в (Grozdev & Nenkov, 2017). Предложениите доказателства водят до уточнения на някои от свойствата, формулирани в (Grozdev & Nenkov, 2017).

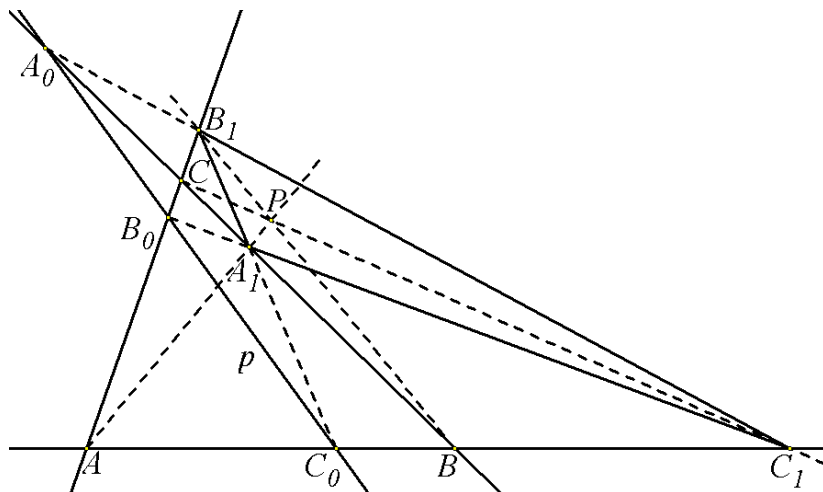
Keywords: triangle; centroid; circumcurve; Euler curve; Euler line

В (Grozdev & Nenkov, 2017) с помощта на динамичните възможности на програмата THE GEOMETER'S SKETCHPAD (GSP) и логиката на принципа за дуалност в равнината на триъгълник без доказателства са описани конструкциите на едно изображение между точки и прави и една крива, зависеща от права. Тук ще докажем свойствата на изображението и кривата, формулирани в (Grozdev & Nenkov, 2017). За целта разглеждаме произволен триъгълник ABC , спрямо който ще използваме барицентрични координати, като $A(1,0,0)$, $B(0,1,0)$ и $C(0,0,1)$ (Paskalev & Chobanov, 1985).

1. Аналитични изрази, свързани с изображението φ . Нека $P(x_i, y, z)$ е крайна ($x_p + y_p + z_p = 1$) или безкрайна ($x_p + y_p + z_p = 0$) точка в равнината на $\triangle ABC$, която не лежи върху никоя от правите BC , CA и AB . Ако $A_1 = PA \cap BC$, $B_1 = PB \cap CA$ и $C_1 = PC \cap AB$ (фиг. 1), то

$$(1) \quad A_1\left(0, \frac{y_p}{y_p + z_p}, \frac{z_p}{y_p + z_p}\right), B_1\left(\frac{x_p}{z_p + x_p}, 0, \frac{z_p}{z_p + x_p}\right), C_1\left(\frac{x_p}{x_p + y_p}, \frac{y_p}{x_p + y_p}, 0\right).$$

След това намираме, че координатите на точките $A_0 = BC \cap B_1C_1$, $B_0 = CA \cap C_1A_1$ и $C_0 = AB \cap A_1B_1$ (фиг. 1) са следните:



Фигура 1

$$(2) \quad A_0 \left(0, \frac{y_p}{y_p - z_p}, \frac{z_p}{z_p - y_p} \right), B_0 \left(\frac{x_p}{x_p - z_p}, 0, \frac{z_p}{z_p - x_p} \right), C_0 \left(\frac{x_p}{x_p - y_p}, \frac{y_p}{y_p - x_p}, 0 \right).$$

От (Paskalev & Chobanov, 1985) е известно, че точките $P_1(x_1, y_1, z_1)$, $P_2(x_2, y_2, z_2)$ и $P_3(x_3, y_3, z_3)$ лежат на една права тогава и само тогава, когато е изпълнено равенството

$$(3) \quad \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Като приложим (3) към координатите на точките A_0 , B_0 и C_0 , получаваме, че те лежат на една права p (фиг. 1), чието уравнение е следното:

$$(4) \quad p: y_p z_p x + z_p x_p y + x_p y_p z = 0.$$

Така получаваме едно доказателство на известната теорема на Дезарг за перспективните триъгълници (Mateev, 1977).

С помощта на уравнението (4) получаваме единствена права p , която е съответна на точката $P(x_p, y_p, z_p)$ при изображение φ в равнината на $\triangle ABC$. Ако P съвпада с медицентъра $G\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$ на ABC , от (4) следва, че $\varphi(P)$ е безкрайната права на равнината. Обратно, ако $p: ux + vy + wz = 0$ е права (неминаваща през никой от върховете A , B и C) в равнината на

$\triangle ABC$, чрез равенствата $y_P z_P = u$, $z_P x_P = v$ и $x_P y_P = w$ еднозначно определяме точка P , координатите на която са следните:

$$(5) \quad P\left(\frac{vw}{vw+wu+uv}, \frac{wu}{vw+wu+uv}, \frac{uv}{vw+wu+uv}\right).$$

Когато P е безкрайна, изпълнено е равенството $uv + vw + wu = 0$. В този случай за координатите имаме $P(vw, wu, uv)$. Така същото изображение φ съпоставя на правата $p: ux + vy + wz = 0$ еднозначно точка P , чиито координати се получават чрез (5). Ако P е безкрайна точка, правата $p = \varphi(P)$ е такава, че $vw + wu + uv = 0$. Освен това за координатите на A_0 , B_0 и C_0 имаме следното изразяване:

$$(6) \quad A_0\left(0, \frac{w}{w-v}, \frac{v}{v-w}\right), B_0\left(\frac{w}{w-u}, 0, \frac{u}{u-w}\right), C_0\left(\frac{v}{v-u}, \frac{u}{u-v}, 0\right).$$

Ако $C'(c_1, c_2, 0)$ ($c_1 + c_2 = 1$) е точка от правата AB (различна от A и B), произволна права p' през C' има следното уравнение $p': v'c_2x - v'c_1y - w'c_1z = 0$. След прилагане на формулите (5) получаваме, че точката P' , съответна на p' при φ , има следното координатно представяне:

$$P'\left(\frac{w'c_1}{w'(c_1 - c_2) - v'c_2}, \frac{w'c_2}{w'(c_2 - c_1) + v'c_2}, \frac{v'c_2}{w'(c_2 - c_1) + v'c_2}\right).$$

Аналогично образът на права $p'': v''c_2x - v''c_1y - w''c_1z = 0$ през C' е точката

$$P''\left(\frac{w''c_1}{w''(c_1 - c_2) - v''c_2}, \frac{w''c_2}{w''(c_2 - c_1) + v''c_2}, \frac{v''c_2}{w''(c_2 - c_1) + v''c_2}\right).$$

Сега чрез (3) намираме, че точките P' и P'' лежат на права p_1 с уравнение $p_1: c_2x + c_1y = 0$. От това уравнение следва, че точките P' и P'' лежат на постоянна права p_1 , минаваща през C . Ако C' е средата на AB , правата p_1 е успоредна на AB .

Нека сега $q: ux + vy = 0$ е права през върха C . Тогава точката $Q'\left(-\frac{v}{u}y', y', z'\right)$ лежи върху q . От (4) следва, че правата q' , съответна на точката Q' при φ , има следното уравнение $q': uz'x - vz'y - vy'z = 0$. Ако $C'' = q' \cap AB$, то $C''\left(\frac{v}{u+v}, \frac{u}{u+v}, 0\right)$. Това означава, че образът на всяка точка от q има за образ при φ права, която минава през постоянната точка C'' . Ако $q \parallel AB$, то $u = v = 1$ и C'' е средата на AB .

Проведените разсъждения доказват, че съответствието φ притежава следните свойства:

1) съответните точки $P = \varphi(p)$ на всички прави p , минаващи през постоянна точка C' от правата AB , лежат на една права през C ;

2) съответните прави $q = \varphi(Q)$ на всички точки Q , лежащи на права през C , минават през постоянна точка C'' от правата AB .

Тези свойства показват как може да се допълни изображението φ , така че да съпоставя взаимно еднозначно точките от AB и правите през C . Аналогично стоят нещата и с другите два върха на $\triangle ABC$.

Преди да преминем към описване на кривата на Ойлер за права спрямо $\triangle ABC$ и нейните свойства, ще изведем уравнението на крива, вписана в $\triangle ABC$ и допираща се до две прави, различни от BC , CA и AB .

2. Крива, допираща се до страните на координатния триъгълник и две прави. Нека кривата $k: a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{23}yz + 2a_{31}zx = 0$ се допира до правите $BC: x = 0$, $CA: y = 0$, $AB: z = 0$, $l_1: u_1x + v_1y + w_1z = 0$ и $l_2: u_2x + v_2y + w_2z = 0$, съответно в точките A_1, B_1, C_1, L_1 и L_2 .

Общите точки на k и BC удовлетворяват уравнението $a_{22}y^2 + 2a_{23}yz + a_{33}z^2 = 0$. Тъй като BC се допира до k , от последното уравнение следва, че за координатите y и z на допирната точка A_1 са изпълнени равенствата $\frac{y}{z} = -\frac{a_{23}}{a_{22}}$ и $\frac{z}{y} = -\frac{a_{23}}{a_{33}}$.

Аналогично за допирните точки B_1 и C_1 получаваме съответно двойките равенства $\frac{z}{x} = -\frac{a_{31}}{a_{33}}$, $\frac{x}{z} = -\frac{a_{31}}{a_{11}}$ и $\frac{x}{y} = -\frac{a_{12}}{a_{11}}$, $\frac{y}{x} = -\frac{a_{12}}{a_{22}}$.

Правите AA_1 , BB_1 и CC_1 минават през една точка $P(x, y, z)$. Ако $\frac{BA}{CA}$, $\frac{CB_1}{AB_1} = k_b$ и $\frac{AC_1}{BC_1} = k_c$, то координатите на P са свързани с

числата k_a, k_b и k_c чрез равенствата $k_a = -\frac{y}{z}$, $k_b = -\frac{z}{x}$ и $k_c = -\frac{x}{y}$ (Paskalev & Chobanov, 1985). Като комбинираме тези равенства с предишните шест,

получаваме $a_{22} = k_a a_{23}$, $a_{33} = \frac{1}{k_a} a_{23}$, $a_{33} = k_b a_{31}$, $a_{11} = \frac{1}{k_2} a_{31}$, $a_{11} = k_3 a_{12}$

и $a_{22} = \frac{1}{k_3} a_{12}$. Оттук и теоремата на Чева, изразяваща се с равенството $k_a k_b k_c = -1$ (Paskalev & Chobanov, 1985), следват зависимостите $\frac{1}{k_3} = -\frac{1}{k_a k_b}$,

$a_{22} = \frac{1}{k_c} a_{12}$, $a_{33} = k_b^2 k_c a_{12}$, $a_{23} = -k_b a_{12}$ и $a_{31} = k_b k_c a_{12}$. След заместване на тези равенства в уравнението на k получаваме

$$(7) \quad k : k_c^2 x^2 + y^2 + k_b^2 k_c^2 z^2 + 2k_c xy - 2k_b k_c yz + 2k_b k_c^2 zx = 0.$$

От равенствата $x + y + z = 1$ и $u_i x + v_i y + w_i z = 0$ намираме

$$y = \frac{(w_i - u_i)x - w_i}{v_i - w_i} \text{ и } z = \frac{(u_i - v_i)x + v_i}{v_i - w_i} \quad (i = 1, 2). \text{ След заместване на тези}$$

равенства в (7) се получава:

$$\begin{aligned} & \left[(k_b k_c + 1) u_i^2 + k_c^2 (k_b - 1)^2 v_i^2 + (k_c - 1)^2 w_i^2 - 2k_c (k_b^2 k_c - k_b k_c + k_b + 1) u_i v_i + \right. \\ (8) & \left. + 2k_c (k_b k_c + k_b - k_c + 1) v_i w_i - 2(k_b k_c^2 + k_b k_c - k_c + 1) w_i u_i \right] x^2 + \\ & + \left[2k_b k_c (k_b k_c + 1) u_i v_i - 2k_c (k_2 k_3 + 2k_2 + 1) v_i w_i + 2(k_b k_c + 1) w_i u_i - \right. \\ & \left. - 2k_b k_c^2 (k_b - 1) v_i^2 + 2(k_c - 1) w_i^2 \right] x + (k_b k_c v_i + w_i)^2 = 0. \end{aligned}$$

Дискриминантата на уравнение (8) е $k_b k_c^2 (v_i - w_i)^2 (k_b k_c u_i v_i - k_c v_i w_i + w_i u_i)$ ($i = 1, 2$). Правата l_i е допирателна за k тогава и само тогава, когато

$$k_b k_c u_i v_i - k_c v_i w_i + w_i u_i = 0 \quad (i = 1, 2). \text{ Отгук } k_b = \frac{w_i (k_c v_i - u_i)}{k_c u_i v_i} \quad (i = 1, 2). \text{ Зато-}$$

$$\text{ва } k_b = \frac{w_1 (k_c v_1 - u_1)}{k_c u_1 v_1} = \frac{w_2 (k_c v_2 - u_2)}{k_c u_2 v_2}. \text{ Следователно } k_c = -\frac{u_1 u_2 (v_1 w_2 - v_2 w_1)}{v_1 v_2 (w_1 u_2 - w_2 u_1)}$$

$$\text{и } k_b = -\frac{w_1 w_2 (u_1 v_2 - u_2 v_1)}{u_1 u_2 (v_1 w_2 - v_2 w_1)}. \text{ Сега заместваме тези равенства в (7) и получа-}$$

ваме, че кривата k има следното уравнение

$$\begin{aligned} & u_1^2 u_2^2 (v_1 w_2 - v_2 w_1)^2 x^2 + v_1^2 v_2^2 (w_1 u_2 - w_2 u_1)^2 y^2 + w_1^2 w_2^2 (u_1 v_2 - u_2 v_1) z^2 + \\ (9) & k : + 2u_1 u_2 v_1 v_2 (u_1 w_2 - u_2 w_1) (v_1 w_2 - v_2 w_1) xy + 2v_1 v_2 w_1 w_2 (v_1 u_2 - v_2 u_1) (w_1 u_2 - w_2 u_1) yz + \\ & + 2w_1 w_2 u_1 u_2 (w_1 v_2 - w_2 v_1) (u_1 v_2 - u_2 v_1) zx = 0. \end{aligned}$$

След решаване на системите, образувани от () и уравненията на правите BC , CA , AB , l_1 и l_2 , определяме координатите на допирните точки A_1 , B_1 , C_1 , L_1 и L_2 във вида:

$$\begin{aligned} (10) \quad & A_1 \left(0, \frac{w_1 w_2 (u_1 v_2 - u_2 v_1)}{u_1 v_2 w_2 (v_1 - w_1) - u_2 v_1 w_1 (v_2 - w_2)}, \frac{v_1 v_2 (u_1 w_2 - u_2 w_1)}{u_1 v_2 w_2 (v_1 - w_1) - u_2 v_1 w_1 (v_2 - w_2)} \right), \\ & B_1 \left(\frac{w_1 w_2 (v_1 u_2 - v_2 u_1)}{v_1 w_2 u_2 (w_1 - u_1) + v_2 w_1 u_1 (w_2 - u_2)}, 0, \frac{u_1 u_2 (v_1 w_2 - v_2 w_1)}{v_1 w_2 u_2 (w_1 - u_1) + v_2 w_1 u_1 (w_2 - u_2)} \right), \\ & C_1 \left(\frac{v_1 v_2 (w_1 u_2 - w_2 u_1)}{w_1 u_2 v_2 (u_1 - v_1) - w_2 u_1 v_1 (u_2 - v_2)}, \frac{u_1 u_2 (w_1 v_2 - w_2 v_1)}{w_1 u_2 v_2 (u_1 - v_1) - w_2 u_1 v_1 (u_2 - v_2)}, 0 \right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 x_{L_1} &= \frac{u_2 v_1 w_1 (v_1 w_2 - v_2 w_1)}{u_1^2 v_2 w_2 (v_1 - w_1) + v_1^2 w_2 u_2 (w_1 - u_1) + w_1^2 u_2 v_2 (u_1 - v_1)}, \\
 y_{L_1} &= \frac{v_2 w_1 u_1 (w_1 u_2 - w_2 u_1)}{u_1^2 v_2 w_2 (v_1 - w_1) + v_1^2 w_2 u_2 (w_1 - u_1) + w_1^2 u_2 v_2 (u_1 - v_1)}, \\
 (11.1) \quad z_{L_1} &= \frac{w_2 u_1 v_1 (u_1 v_2 - u_2 v_1)}{u_1^2 v_2 w_2 (v_1 - w_1) + v_1^2 w_2 u_2 (w_1 - u_1) + w_1^2 u_2 v_2 (u_1 - v_1)}, \\
 x_{L_2} &= -\frac{u_1 v_2 w_2 (v_1 w_2 - v_2 w_1)}{u_2^2 v_1 w_1 (v_2 - w_2) + v_2 w_1 u_1 (w_2 - u_2) + w_2 u_1 v_1 (u_2 - v_2)}, \\
 (11.2) \quad y_{L_2} &= -\frac{v_1 w_2 u_2 (w_1 u_2 - w_2 u_1)}{u_2^2 v_1 w_1 (v_2 - w_2) + v_2 w_1 u_1 (w_2 - u_2) + w_2 u_1 v_1 (u_2 - v_2)}, \\
 z_{L_2} &= -\frac{w_1 u_2 v_2 (u_1 v_2 - u_2 v_1)}{u_2^2 v_1 w_1 (v_2 - w_2) + v_2 w_1 u_1 (w_2 - u_2) + w_2 u_1 v_1 (u_2 - v_2)}.
 \end{aligned}$$

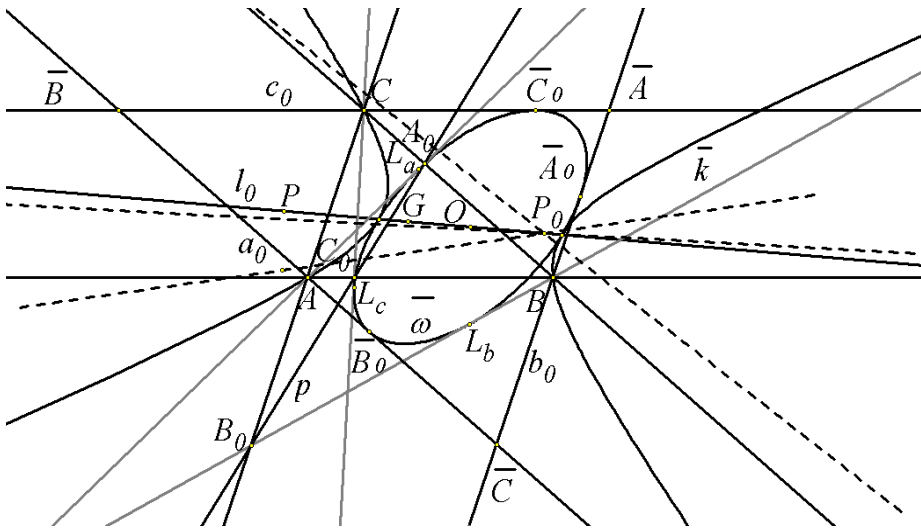
Накрая ще определим координатите (x_0, y_0, z_0) на центъра на k . Както е показано в (Grozdev & Nenkov, 2015), тези координати са решение на системата уравнения:

$$\begin{cases}
 (a_{11} - a_{31})x + (a_{12} - a_{23})y + (a_{31} - a_{33})z = 0, \\
 (a_{12} - a_{31})x + (a_{22} - a_{23})y + (a_{23} - a_{33})z = 0, \\
 x + y + z = 1.
 \end{cases}$$

След решаване на тази система за уравнението (9) получаваме формулите:

$$\begin{aligned}
 x_0 &= -\frac{u_1 v_2 w_2 (v_1 - w_1) - u_2 v_1 w_1 (v_2 - w_2)}{2[u_1 u_2 (v_1 w_2 - v_2 w_1) + v_1 v_2 (w_1 u_2 - w_2 u_1) + w_1 w_2 (u_1 v_2 - u_2 v_1)]}, \\
 (12) \quad y_0 &= -\frac{v_1 w_2 u_2 (w_1 - u_1) - v_2 w_1 u_1 (w_2 - u_2)}{2[u_1 u_2 (v_1 w_2 - v_2 w_1) + v_1 v_2 (w_1 u_2 - w_2 u_1) + w_1 w_2 (u_1 v_2 - u_2 v_1)]}, \\
 z_0 &= -\frac{w_1 u_2 v_2 (u_1 - v_1) - w_2 u_1 v_1 (u_2 - v_2)}{2[u_1 u_2 (v_1 w_2 - v_2 w_1) + v_1 v_2 (w_1 u_2 - w_2 u_1) + w_1 w_2 (u_1 v_2 - u_2 v_1)]}.
 \end{aligned}$$

3. Ойлерова крива на права спрямо триъгълник. Нека p е права в равнината на ΔABC , като $p \cap BC = A_0$, $p \cap CA = B_0$ и $p \cap AB = C_0$ (фиг. 2). Освен това с a_0 , b_0 и c_0 означаваме правите, които минават съответно през върховете A , B и C и са съответно успоредни на страните BC , CA и AB (фиг. 2). Ще докажем, че шестте прави AA_0 , BB_0 , CC_0 , a_0 , b_0 и c_0 са допирателни към една крива от втора степен $\bar{\omega}$ (фиг. 2).



Фигура 2

Уравненията на споменатите прави са следните: $AA_0: yv + wz = 0$, $BB_0: ux + wz = 0$, $CC_0: ux + yv = 0$, $a_0: y + z = 0$, $b_0: x + z = 0$, $c_0: x + y = 0$. Освен това $b_0 \cap c_0 = \bar{A}(-1, 1, 1)$, $c_0 \cap a_0 = \bar{B}(1, -1, 1)$, $a_0 \cap b_0 = \bar{C}(1, 1, -1)$ (фиг. 2). Ще намерим уравнението на кривата, която е вписана в $\Delta \bar{A}\bar{B}\bar{C}$ и се допира до правите AA_0 и BB_0 . За целта разглеждаме $\bar{A}\bar{B}\bar{C}$ като координатен триъгълник. Ако $\bar{A}(x_1, y_1, z_1)$, $\bar{B}(x_2, y_2, z_2)$, $\bar{C}(x_3, y_3, z_3)$, а точката M има координати (x, y, z) спрямо $\Delta \bar{A}\bar{B}\bar{C}$ и координати (x', y', z') спрямо ΔABC , то са изпълнени равенствата: $x = x_1x' + x_2y' + x_3z'$, $y = y_1x' + y_2y' + y_3z'$, $z = z_1x' + z_2y' + z_3z'$ (Paskalev & Chobanov, 1985). Като заместим координатите на $\bar{A}$, $\bar{B}$ и $\bar{C}$, получаваме:

$$(13) \quad x = -x' + y' + z', \quad y = x' - y' + z', \quad z = x' + y' - z'.$$

От равенствата (13) следва:

$$(14) \quad x' = \frac{1}{2}(y+z), \quad y' = \frac{1}{2}(x+z), \quad z' = \frac{1}{2}(x+y).$$

Като използваме (13) за уравненията на AA_0 и BB_0 спрямо $\Delta\overline{ABC}$, намираме:

$$AA_0: (v+w)x' + (w-v)y' + (v-w)z' = 0, \quad BB_0: (w-u)x' + (w+u)y' + (u-w)z' = 0.$$

Приемаме, че правите l_1 и l_2 от предишния пункт съвпадат съответно с AA_0 и BB_0 . Затова са изпълнени равенствата:

$$(15) \quad u_1 = v+w, \quad v_1 = w-v, \quad w_1 = v-w, \quad u_2 = w-u, \quad v_2 = w+u, \quad w_2 = u-w.$$

Заместваме (15) в (9) и получаваме уравнението на крива $\overline{\omega}$ спрямо $\Delta\overline{ABC}$, която се допира до правите a_0 , b_0 , c_0 , AA_0 и BB_0 :

$$(16) \quad \overline{\omega}: u^2(v+w)^2 x'^2 + v^2(w+u)^2 y'^2 + w^2(u+v)^2 z'^2 - \\ - 2uv(v+w)(w+u)x'y' - 2vw(w+u)(u+v)y'z' - 2wu(u+v)(v+w)z'x' = 0.$$

В (16) заместваме (14) и получаваме уравнението на $\overline{\omega}$ спрямо ΔABC :

$$(17) \quad \overline{\omega}: u^2(v-w)^2 x^2 + v^2(w-u)^2 y^2 + w^2(u-v)^2 z^2 - 2uv(3wu+3wv+uv+w^2)xy - \\ - 2vw(3uv+3uw+vw+u^2)yz - 2wu(3vu+3vw+wu+v^2)zx = 0.$$

Ако $\overline{A}_0$, $\overline{B}_0$ и $\overline{C}_0$ са допирните точки на $\overline{\omega}$ съответно с правите a_0 , b_0 и c_0 (фиг. 2), от (10), (13) и (15) намираме техните координати:

$$(18) \quad \overline{A}_0 \left(1, \frac{u(v-w)}{u(v+w)+2vw}, \frac{u(w-v)}{u(v+w)+2vw} \right), \\ \overline{B}_0 \left(\frac{v(u-w)}{v(w+u)+2wu}, 1, \frac{v(w-u)}{v(w+u)+2wu} \right), \\ \overline{C}_0 \left(\frac{w(u-v)}{w(u+v)+2uv}, \frac{w(v-u)}{w(u+v)+2uv}, 1 \right).$$

Координатите на допирните точки L_a и L_b (фиг. 2) съответно на правите AA_0 и BB_0 с $\overline{\omega}$ определяме от (11.1), (11.2), (13) и (15) във вида:

$$L_a \left(\frac{(19)vw(2u+v+w)}{(u+w)v^2+(u+v)w^2}, \frac{wu(w-v)}{(u+w)v^2+(u+v)w^2}, \frac{uv(v-w)}{(u+w)v^2+(u+v)w^2} \right), \\ L_b \left(\frac{vw(w-u)}{(v+u)w^2+(v+w)u^2}, \frac{wu(2v+w+u)}{(v+u)w^2+(v+w)u^2}, \frac{uv(u-w)}{(v+u)w^2+(v+w)u^2} \right).$$

По аналогия с точките L_a и L_b разглеждаме точка L_c , чиито координати се изразяват по следния начин:

$$(20) L_c \left(\frac{vw(v-u)}{(w+v)u^2 + (w+u)v^2}, \frac{wu(u-v)}{(w+v)u^2 + (w+u)v^2}, \frac{uv(2w+u+v)}{(w+v)u^2 + (w+u)v^2} \right).$$

От уравнението (17) на кривата $\bar{\omega}$ и уравнението на правата CC_0 се получава, че те имат само една обща точка, координатите на която се изразяват с (20). Следователно CC_0 се допират до $\bar{\omega}$ в точката L_c (фиг. 2). С това е доказано, че правите AA_0 , BB_0 , CC_0 , a_0 , b_0 и c_0 се допират до една крива от втора степен $\bar{\omega}$. Кривата $\bar{\omega}$ ще наричаме *крива на Ойлер за правата p спрямо $\triangle ABC$* .

4. Две свойства на шестте основни точки на $\bar{\omega}$. Съответствието φ поставя на права p точка P от равнината на $\triangle ABC$, координатите на която се изразяват с (5). Нека P_a , P_b и P_c са средите съответно на отсечките AP , BP и CP , а средите на страните BC , CA и AB са съответно $M_a\left(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$, $M_b\left(\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}\right)$ и $M_c\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right)$.

Следващото свойство свързва правите M_aP_a , M_bP_b и M_cP_c с кривата на Ойлер $\bar{\omega}$.

Свойство 1. *Образите на правите M_aP_a , M_bP_b и M_cP_c при φ са допирните точки съответно на правите a_0 , b_0 и c_0 с $\bar{\omega}$.*

От (5) получаваме координатите на точките P_a , P_b и P_c по следния начин:

$$(21) \begin{aligned} P_a & \left(\frac{2vw + wu + uv}{2(vw + wu + uv)}, \frac{wu}{2(vw + wu + uv)}, \frac{uv}{2(vw + wu + uv)} \right), \\ P_b & \left(\frac{vw}{2(vw + wu + uv)}, \frac{2wu + uv + vw}{2(vw + wu + uv)}, \frac{uv}{2(vw + wu + uv)} \right), \\ P_c & \left(\frac{vw}{2(vw + wu + uv)}, \frac{wu}{2(vw + wu + uv)}, \frac{2uv + vw + wu}{2(vw + wu + uv)} \right). \end{aligned}$$

От (21), координатите на M_a , M_b и M_c и равенството (3) намираме уравненията на правите M_aP_a , M_bP_b и M_cP_c :

$$\begin{aligned} P_aM_a : u(v-w)x + (2vw + wu + uv)y - (2vw + wu + uv)z &= 0, \\ P_bM_b : -(2wu + uv + vw)x + v(w-u)y + (2wu + uv + vw)z &= 0, \end{aligned}$$

$$P_c M_c : (2uv + wu + vw)x - (2uv + wu + vw)y + w(u - v)z = 0.$$

Сега, като използваме (5) и (18), получаваме, че $\varphi(M_a P_a) = \bar{A}_0$, $\varphi(M_b P_b) = \bar{B}_0$ и $\varphi(M_c P_c) = \bar{C}_0$. Това доказва свойство 1.

Другите три допирни точки L_a , L_b и L_c , лежащи на $\bar{\omega}$, притежават следното свойство:

Свойство 2. *Образите на допирните точки на правите AA_0 , BB_0 и CC_0 с $\bar{\omega}$ при φ са прави, минаващи през една точка P_0 от правата PG (фиг. 2).*

Ако $\varphi(L_a) = l_a$, $\varphi(L_b) = l_b$ и $\varphi(L_c) = l_c$, то от (19), (20) и (4) получаваме уравненията на правите l_a , l_b и l_c в следния вид:

$$l_a : u(v - w)x - v(2u + v + w)y + w(2u + v + w)z = 0,$$

$$l_b : u(u + 2v + w)x + v(w - u)y - w(u + 2v + w)z = 0,$$

$$l_c : -u(u + v + 2w)x + v(u + v + 2w)y + w(u - v)z = 0.$$

От последните уравнения получаваме, че правите l_a , l_b и l_c се пресичат в една точка P_0 , координатите на която са следните:

$$(22) \quad \begin{aligned} x_{P_0} &= \frac{vw(2u + v + w)}{(v + w)u^2 + (w + u)v^2 + (u + v)w^2 + 6uvw}, \\ y_{P_0} &= \frac{wu(u + 2v + w)}{(v + w)u^2 + (w + u)v^2 + (u + v)w^2 + 6uvw}, \\ z_{P_0} &= \frac{uv(u + v + 2w)}{(v + w)u^2 + (w + u)v^2 + (u + v)w^2 + 6uvw}. \end{aligned}$$

Освен това от (3) следва, че правата l_0 , определена от точката P и медицентъра $G\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$, има следното уравнение:

$$(23) \quad l_0 : u(v - w)x + v(w - u)y + w(u - v)z = 0.$$

След заместване на координатите (22) в лявата част на уравнението (23) установяваме, че точката P_0 лежи върху правата l_0 (фиг. 2).

5. Няколко свойства на Ойлеровата крива, свързани с определена описана за триъгълника крива. Нека $P = \varphi(p)$, G е медицентърът на ΔABC и $O(x_0, y_0, z_0)$ е такава точка, за която $\overrightarrow{GO} = \frac{1}{2}\overrightarrow{GP}$. Точката O е център на описана за ΔABC крива $\bar{k}$ (фиг. 2). Освен това точките P , O и G лежат на една права, която наричаме *Ойлерова права за точката P спрямо ΔABC* (фиг. 2) (Grozdev & Nenkov, 2014,1). Следователно точката P_0 от свойство 2 лежи върху Ойлеровата права l_0 , определена от P (фиг. 2). С Ойлеровата права l_0 са свързани и други свойства на кривата $\bar{\omega}$.

От дефиницията на точката O следва, че за координатите ѝ са изпълнени равенствата $x_0 = \frac{1-x_P}{2}$, $y_0 = \frac{1-y_P}{2}$ и $z_0 = \frac{1-z_P}{2}$. Като използваме (5), за тези координати получаваме:

$$(24) \quad x_0 = \frac{u(v+w)}{2(vw+wu+uv)}, \quad y_0 = \frac{v(w+u)}{2(vw+wu+uv)}, \quad z_0 = \frac{w(u+v)}{2(vw+wu+uv)}.$$

Нека $O_1(x_1, y_1, z_1)$ е центърът на $\bar{\omega}$. От (12), (13) и (15) след известни преобразувания получаваме равенствата $x_1 = x_0$, $y_1 = y_0$ и $z_1 = z_0$. Така получихме следното

Свойство 3. Кривите $\bar{k}$ и $\bar{\omega}$ имат общ център (фиг. 2).

Сега ще намерим общите точки на $\bar{k}$ и $\bar{\omega}$ с l_0 . Уравнението на $\bar{k}$ е следното $(-x_0 + y_0 + z_0)x_0yz + (x_0 - y_0 + z_0)y_0zx + (x_0 + y_0 - z_0)z_0xy = 0$. Като заместим с равенствата (24), получаваме:

$$(25) \quad \bar{k} : (v+w)yz + (w+u)zx + (u+v)xy = 0.$$

От уравнението (23) на правата l_0 и равенството $x+y+z=1$ следва:

$$(26) \quad y = \frac{(uv+vw-2wu)x+w(u-v)}{uv+wu-2vw}, \quad z = \frac{(vw+wu-2uv)x+v(u-w)}{uv+wu-2vw}.$$

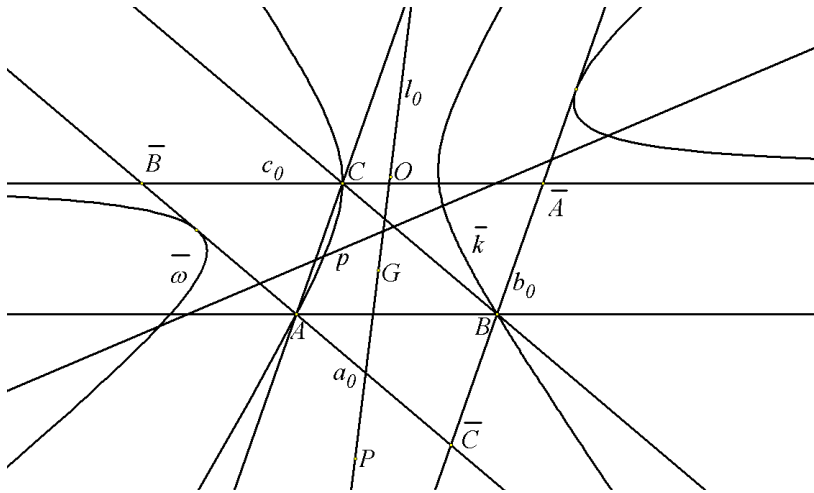
След заместване на тези равенства в уравнението (25) на $\bar{k}$ получаваме следващото квадратно уравнение относно x :

$$(27) \quad (vw+wu+uv)[(v+w)u^2+(w+u)v^2+(u+v)w^2-6uvw]x^2 - \\ -u(v+w)[(v+w)u^2+(w+u)v^2+(u+v)w^2-6uvw]x+vw(v+w)(w-u)(u-v)=0.$$

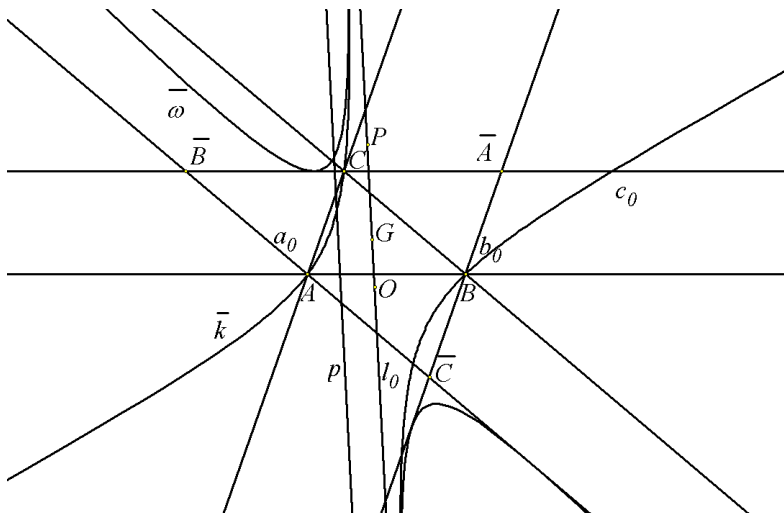
По аналогичен начин от уравнението (17) на $\bar{\omega}$, уравнението (23) на правата l_0 и равенството $x+y+z=1$ получаваме квадратното уравнение (27). Следователно кривите $\bar{k}$ и $\bar{\omega}$ имат едни и същи общи точки с правата l_0 . Координатите на тези общи точки намираме от (26) и (27) във вида:

$$(28) \quad x_{1,2} = \frac{u(v+w)\tau \pm (uv+vw-2wu)\sqrt{(v+w)(w+u)(u+v)}\tau}{2(vw+wu+uv)\tau}, \\ y_{1,2} = \frac{v(w+u)\tau \pm (uv+vw-2wu)\sqrt{(v+w)(w+u)(u+v)}\tau}{2(vw+wu+uv)\tau}, \\ z_{1,2} = \frac{w(u+v)\tau \pm (vw+wu-2uv)\sqrt{(v+w)(w+u)(u+v)}\tau}{2(vw+wu+uv)\tau},$$

където $\tau = (v+w)u^2 + (w+u)v^2 + (u+v)w^2 - 6uvw$.



Фигура 3

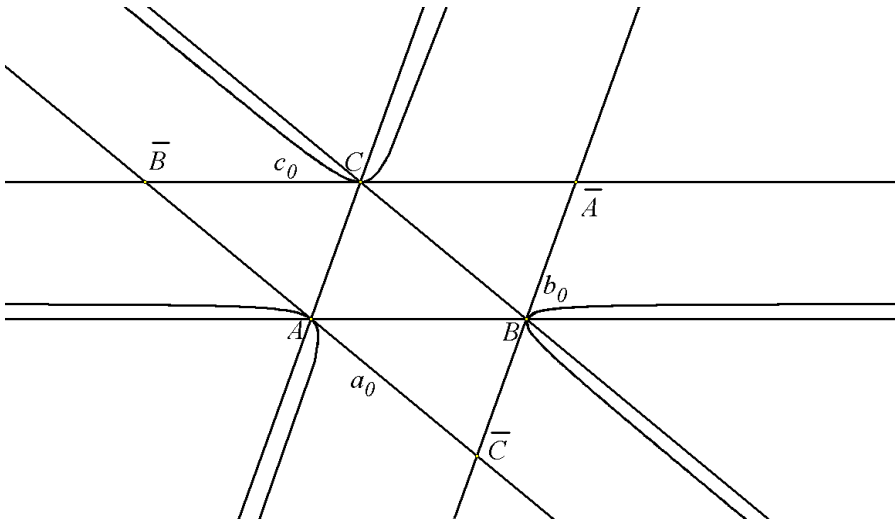


Фигура 4

От (28) се вижда, че пресечните точки на $\bar{k}$ и $\bar{\omega}$ с l_0 не съществуват, когато $(v+w)(w+u)(u+v)\tau < 0$ (фиг. 3). Когато $(v+w)(w+u)(u+v)\tau > 0$, съществуват две такива точки (фиг. 2).

Ако е изпълнено някое от равенствата $v+w=0$, $w+u=0$ или $u+v=0$, правата p би съвпадала с някоя от правите a_0 , b_0 или c_0 , което е изключено по

условие. Сега да обърнем внимание на това, че векторът $\bar{\alpha}(v-w, w-u, u-v)$ е колинеарен с правата $p: ux + vy + wz = 0$, пораждаща Ойлеровата крива $\bar{\omega}$. Ако заместим координатите на α в уравнения (17), (23) и (25), виждаме, че те се превръщат във верни равенства тогава и само тогава, когато $\tau = 0$. Следователно, когато $\tau = 0$, правите l_0 и p са успоредни, а кривите $\bar{k}$ и $\bar{\omega}$ имат само една обща безкрайна точка, определена от вектора α (фиг. 4). Така получаваме, че при $\tau = 0$ кривите $\bar{k}$ и $\bar{\omega}$ са хиперболи, за които l_0 е обща асимптота (фиг. 4). Сега да заместим $u = y_P z_P$, $v = z_P x_P$ и $w = x_P y_P$ в $\tau = 0$. Получаваме равенството $y_P z_P + z_P x_P + x_P y_P - 9x_P y_P z_P = 0$. Следователно l_0 е обща асимптота (допирателна в безкрайна точка) за $\bar{k}$ и $\bar{\omega}$ тогава и само тогава, когато точката P , която е съответна на p при φ , лежи върху кривата от трета степен $K: yz + zx + xy - 9xyz = 0$ (фиг. 5).



Фигура 5

Сега ще докажем, че и в останалите случаи кривите $\bar{k}$ и $\bar{\omega}$ се допират в общите си точки с l_0 (фиг. 2). В (Grozdev & Nenkov, 2014, 2) е показано, че правата l , допираща се до кривата $k: a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{23}yz + 2a_{31}zx = 0$ в точката $M(x_M, y_M, z_M)$, има следното уравнение:

$$(29) l: (a_{11}x_M + a_{12}y_M + a_{13}z_M)x + (a_{21}x_M + a_{22}y_M + a_{23}z_M)y + (a_{31}x_M + a_{32}y_M + a_{33}z_M)z = 0.$$

От уравнения (17) и (25) на кривите $\bar{\omega}$ и $\bar{k}$, координатите (28) и уравнението (29) получаваме, че двете криви $\bar{\omega}$ и $\bar{k}$ имат общи допирателни в общите си точки (28). Тези допирателни имат следните уравнения:

$$\begin{aligned} & \left\{ [\mp(v+w)(w+u)(u+v)-s]\tau + 2u(vw+wu+uv)s \right\} x + \\ & + \left\{ [\mp(v+w)(w+u)(u+v)-s]\tau + 2v(vw+wu+uv)s \right\} y + \\ & + \left\{ [\mp(v+w)(w+u)(u+v)-s]\tau + 2w(vw+wu+uv)s \right\} z = 0, \end{aligned}$$

където $s = \sqrt{(v+w)(w+u)(u+v)\tau}$.

Получените резултати обобщаваме в следващите свойства.

Свойство 4. Ако кривите $\bar{k}$ и $\bar{\omega}$ имат общи точки с Ойлеровата права l_0 , определена от точката P , то $\bar{k}$ и $\bar{\omega}$ са допирателни в тези точки (фиг. 2).

Свойство 5. Ойлеровата права l_0 е успоредна на правата p тогава и само тогава, когато точката $P = \varphi(p)$ описва кривата от трета степен $K : yz + zx + xy - 9xyz = 0$ (фиг. 4, 5).

Свойство 6. Кривите $\bar{k}$ и $\bar{\omega}$ са хиперболи, за които Ойлеровата права l_0 е обща асимптота тогава и само тогава, когато $l_0 \parallel p$ (фиг. 4).

Доказаното тук свойство 4 се различава от формулираното в (Grozdev & Nenkov, 2017) свойство 4 по това, че в него изрично е отбелязано съществуването на общите точки на $\bar{k}$ и $\bar{\omega}$ с l_0 . Както е споменато по-горе, тези точки при определени условия може да не съществуват. Разликата се дължи на това, че свойство 4 в (Grozdev & Nenkov, 2017) е формулирано само въз основа на извършени компютърни наблюдения, а уточнението му тук се дължи на аналитичните изследвания, които водят до извършеното доказателство на свойството. Освен това свойства 5 и 6 допълват свойство 4.

6. Крива на Ойлер за правата на Ойлер. С $\bar{\omega}_0$ означаваме кривата на Ойлер за правата на Ойлер l_0 , определена от точката P . От (17) и (25) намираме, че уравнението на кривата $\bar{\omega}_0$ е следното:

$$\begin{aligned} & u^2(v-w)^2(uv+wu-2vw)^2x^2 + v^2(w-u)^2(uv+vw-2wu)^2y^2 + \\ & + w^2(u-v)^2(wu+vw-2uv)^2z^2 + \\ (30) \quad & \bar{\omega}_0 : + 2uv(v-w)(w-u)[(2u^2+2v^2-3uv)w^2 - uvw(u+v) + u^2v^2]xy + \\ & + 2vw(w-u)(u-v)[(2v^2+2w^2-3vw)u^2 - uvw(v+w) + v^2w^2]yz + \\ & + 2wu(u-v)(v-w)[(2w^2+2u^2-3wu)v^2 - uvw(w+u) + w^2u^2]zx = 0. \end{aligned}$$

След решаване на системата, определена от уравненията (17) и (30) и равенството $x + y + z = 1$, намираме, че тя притежава единствено решение $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$. Така получаваме следното

$$(31) \quad y = \frac{(w-u)x-w}{v-w}, \quad z = \frac{(u-v)x+v}{v-w}.$$

След решаване на това уравнение и заместване на получените резултати в (31) намираме, че координатите на общите точки на $\bar{\omega}$ и p се изразяват с формулите:

$$\begin{aligned}
\bar{x}_{1,2} &= \frac{-vw(v+w)(w+u)(u+v)(2u-v-w) \pm uvw(v-w)\mathcal{G}}{(v+w)(w+u)(u+v)\tau}, \\
(32) \quad \bar{y}_{1,2} &= \frac{-wu(v+w)(w+u)(u+v)(2v-w-u) \pm uvw(w-u)\mathcal{G}}{(v+w)(w+u)(u+v)\tau}, \\
\bar{z}_{1,2} &= \frac{-uv(v+w)(w+u)(u+v)(2w-u-v) \pm uvw(u-v)\mathcal{G}}{(v+w)(w+u)(u+v)\tau},
\end{aligned}$$

От (32) се вижда, че $\bar{w}$ и p имат общи точки, когато $(v+w)(w+u)(u+v)(u+v+w) \leq 0$. Правата p е допирателна за $\bar{w}$ тогава

и само тогава, когато $u + v + w = 0$. От това равенство и (32) следва, че p се допира до $\bar{\omega}$ в точката $G\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$. Оттук получаваме следното

Свойство 8. Ако Ойлеровата крива $\bar{\omega}$ се допира до пораждащата я права p , то допирната точка е медицентърът G на ΔABC (фиг. 6).

Ако в равенството $u + v + w = 0$ заместим $u = y_p z_p$, $v = z_p x_p$ и $w = x_p y_p$, получаваме $y_p z_p + z_p x_p + x_p y_p = 0$. Това означава, че точката $P = \varphi(p)$ лежи върху елипсата $k_G : yz + zx + xy = 0$, която има за център медицентъра G (фиг. 6). Така получихме следното

Свойство 9. Ако Ойлеровата крива $\bar{\omega}$ се допира до пораждащата я права p , то точката $P = \varphi(p)$ лежи върху описаната за ΔABC елипса k_G с център неговия медицентър G (фиг. 6).

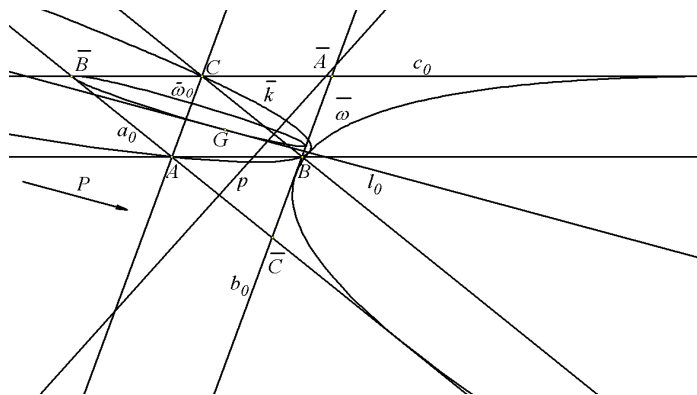
Тъй като според свойство 7 кривата $\bar{\omega}_0$ се допира до пораждащата я права l_0 , от свойство 9 следва

Свойство 10. Точката $L_0 = \varphi(l_0)$ лежи върху елипсата k_G .

Всъщност от (5) и (23) следва, че координатите на L_0 са следните:

$$(33) \quad \begin{aligned} x_{L_0} &= \frac{vw(u-v)(u-w)}{v^2w^2 + w^2u^2 + u^2v^2 - uvw(u+v+w)}, \\ y_{L_0} &= \frac{wu(v-w)(v-u)}{v^2w^2 + w^2u^2 + u^2v^2 - uvw(u+v+w)}, \\ z_{L_0} &= \frac{uv(w-u)(w-v)}{v^2w^2 + w^2u^2 + u^2v^2 - uvw(u+v+w)}. \end{aligned}$$

От координатите (33) се вижда, че точката $L_0 \in k_G$, което по друг начин потвърждава свойство 10.



Фигура 7

8. Определяне вида на кривата $\bar{\omega}$. За да определим взаимното положение на $\bar{\omega}$ и безкрайната права на $\triangle ABC$, в уравнението (16) на $\bar{\omega}$ спрямо $\triangle ABC$ заместваме $u = y_p z_p$, $v = z_p x_p$, $w = x_p y_p$ и $z' = -x' - y'$ и получаваме уравнението:

$$\begin{aligned} & (x_p^2 + 4y_p^2 + z_p^2 + 4y_p z_p + 2z_p x_p + 4x_p y_p) x'^2 \\ & + 2(2x_p^2 + 2y_p^2 - z_p^2 + y_p z_p + z_p x_p + 3x_p y_p) x' y' + \\ & + (4x_p^2 + y_p^2 + z_p^2 + 2y_p z_p + 4z_p x_p + 4x_p y_p) y'^2 = 0. \end{aligned}$$

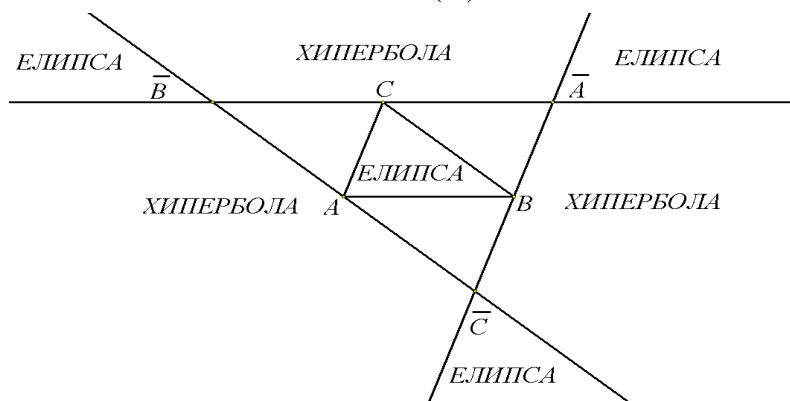
Дискриминантата на това уравнение е

$D' = -8(y_p + z_p)(z_p + x_p)(x_p + y_p)(x_p + y_p + z_p)$. От координатите на P спрямо $\triangle ABC$ в D' преминаваме към координатите на P спрямо $\triangle \bar{A}\bar{B}\bar{C}$ чрез равенствата (13). Така получаваме $D' = -64x'_p y'_p z'_p (x'_p + y'_p + z'_p)$. От последния израз следва, че $D' = 0$ тогава и само тогава, когато $x'_p + y'_p + z'_p = 0$, т.е. когато P е безкрайна точка. Оттук получаваме

Свойство 11. Кривата $\bar{\omega}$ е парабола тогава и само тогава, когато образът при φ на правата p , пораждаща $\bar{\omega}$, е безкрайна точка (фиг. 7).

В случаите, когато P е безкрайна, описаната крива k също е парабола. Според свойство 4 параболите имат две допирни точки, от които едната е крайна, а другата е общата им безкрайна точка (фиг. 7).

В останалите случаи $x'_p + y'_p + z'_p = 1$ и координатите x'_p , y'_p и z'_p имат точно определени знаци в зависимост от положението на $P = \varphi(p)$ спрямо $\triangle \bar{A}\bar{B}\bar{C}$. От тях се определя, че $D' < 0$ или $D' > 0$. В първия случай кривата $\bar{\omega}$ е елипса, а във втория – хипербола. На фиг. 8 е показан видът на $\bar{\omega}$ в зависимост от положението на точката $P = \varphi(p)$ спрямо $\triangle \bar{A}\bar{B}\bar{C}$.



Фигура 8

От направените изводи за вида на $\bar{\omega}$ се вижда, че кривата от трета степен K се съдържа в областите, определени от $\Delta\bar{u}$, в които $\bar{\omega}$ е хипербола (фиг. 5). Това кореспондира със свойства 5 и 6. Освен това елипсата k_G от свойство 9 е вписана в $\Delta\bar{ABC}$, а когато P е вътрешна за $\Delta\bar{ABC}$, кривата $\bar{\omega}$ е елипса (фиг. 6, 8). Така получаваме следното

Свойство 12. Ако $\bar{\omega}$ се допира до пораждащата я права p , то кривата $\bar{\omega}$ е елипса (фиг. 6, 7).

Ако $x_P + y_P + z_P = 0$, то P е безкрайна и $D' = 0$. Следователно в този случай $\bar{\omega}$ е парабола. Нека сега P не е безкрайна точка. Случаят с допиране-то на $\bar{k}$ и $\bar{\omega}$ до l_0 също може да се прецизира, но преди това ще определим вида на кривата $\bar{\omega}$ в зависимост от точката P .

Когато се говори за вид на една крива от втора степен, е любопитно да се разбере кога тя е окръжност. Кривата $\bar{\omega}$ е вписана в $\Delta\bar{ABC}$. Затова тя е окръжност тогава и само тогава, когато е вписана окръжност на $\Delta\bar{ABC}$. Следователно $\bar{\omega}$ е окръжност в точно четири случая.

Ако $BC = a$, $CA = b$ и $AB = c$, центровете на вписаните в $\Delta\bar{ABC}$ окръжности имат следните координатни представяния:

$$\left(\frac{a}{a+b+c}, \frac{b}{a+b+c}, \frac{c}{a+b+c}\right), \left(\frac{-a}{-a+b+c}, \frac{b}{-a+b+c}, \frac{c}{-a+b+c}\right), \\ \left(\frac{a}{a-b+c}, \frac{-b}{a-b+c}, \frac{c}{a-b+c}\right), \left(\frac{a}{a+b-c}, \frac{b}{a+b-c}, \frac{-c}{a+b-c}\right).$$

От тези координати, формулите (13) за преминаване на координати спрямо $\Delta\bar{ABC}$ към координати спрямо ΔABC и формулите (24) за координатите на центъра на $\bar{\omega}$ намираме, че вписаните в $\Delta\bar{ABC}$ окръжности са Ойлеровите криви на следващите прави:

$$r: (a-3b+c)(a+b-3c)x + (a+b-3c)(-3a+b+c)y + (-3a+b+c)(a-3b+c)z = 0,$$

$$r_a: -(a+3b-c)(a-b+3c)x + (a-b+3c)(3a+b+c)y + (a+3b-c)(3a+b+c)z = 0,$$

$$r_b: (-a+b+3c)(a+3b+c)x - (-a+b+3c)(3a+b-c)y + (3a+b-c)(a+3b+c)z = 0,$$

$$r_c: (-a+3b+c)(a+b+3c)x + (3a-b+c)(a+b+3c)y - (-a+3b+c)(3a-b+c)z = 0$$

Ако $R = \varphi(r)$, $R_a = \varphi(r_a)$, $R_b = \varphi(r_b)$ и $R_c = \varphi(r_c)$, от горните уравнения и (5) следва

$$R\left(-\frac{3a+b+c}{a+b+c}, -\frac{a-3b+c}{a+b+c}, -\frac{a+b-3c}{a+b+c}\right), R_a\left(-\frac{3a+b+c}{-a+b+c}, \frac{a+3b-c}{-a+b+c}, \frac{a-b+3c}{-a+b+c}\right),$$

$$R_b\left(\frac{3a+b-c}{a-b+c}, -\frac{a+3b+c}{a-b+c}, \frac{-a+b+3c}{a-b+c}\right), R_c\left(\frac{3a-b+c}{a+b-c}, \frac{-a+3b+c}{a+b-c}, -\frac{a+b+3c}{a+b-c}\right).$$

От тези окръжности само вътрешно вписаната може да се допира до пораждащата я права r , защото само тя би могла да съдържа медицентъра G на $\triangle ABC$ (свойство 8). Тъй като триъгълниците $\triangle \overline{ABC}$ и $\triangle ABC$ са хомотетични с център на хомотетия G , то ако G лежи върху вписаната окръжност на единия триъгълник, тя лежи върху вписаната окръжност и на другия (фиг. 9). Освен това G е обща допирна точка за двете окръжности и правата r е тяхната обща допирателна в G (фиг. 9). Накрая от условието за допиране $u + v + w = 0$ и коефициентите в r получаваме, че G е обща допирна точка за вписаните окръжности на триъгълниците $\triangle \overline{ABC}$ и $\triangle ABC$ тогава и само тогава, когато е изпълнено равенството
$$\frac{a^2 + b^2 + c^2}{bc + ca + ab} = \frac{6}{5}.$$

REFERENCES/ЛИТЕРАТУРА

- Grozdev, S. & V. Nenkov (2014,1). Generalizations of some classical theorems of the triangle geometry (In Russian). *Theoretical and applied aspects of mathematics, informatics and education. Proceedings of the International Scientific Conference, Archangelsk, SAFU*, 35 – 54. (ISBN 978-5-261-00990-0) [Гроздев, С. & В. Ненков. (2014, 1). Обобщения некоторых классических теорем геометрии треугольника. *Теоретические и прикладные аспекты математики, информатики и образования. Сборник материалов международной научной конференции. Архангельск, САФУ*, 35 – 54. (ISBN 978-5-261-00990-0)].
- Grozdev, S. & V. Nenkov (2014, 2). Concurrence, generated by tangents (In Bulgarian), *Mathematics and Informatics*, 6, 613 – 616. [Гроздев, С. & В. Ненков. (2014, 2). Конкурентност, породена от тангенти, *Математика и информатика*, 6, 613 – 616.]
- Grozdev, S. & V. Nenkov (2015). Conics with collinear centers (In Bulgarian). *Mathematics and mathematical education*, 44, 291 – 298. [Гроздев, С. & В. Ненков. (2015). Конични сечения с колинеарни центрове. *Математика и математическо образование*, 44, 291 – 298].
- Grozdev, S. & V. Nenkov (2017). Some constructions, generated by the duality principle (In Bulgarian). *Mathematics and informatics*, 4, 391 – 400. [Гроздев, С. & В. Ненков. (2017). Няколко конструкции, породени от принципа за дуалност, *Математика и информатика*, 4, 391 – 400].
- Mateev, A. (1977). *Projective Geometry* (In Bulgarian). Sofia: Nauka i Izkustvo. [Матеев, А. (1977). *Проективна геометрия*. София: Наука и изкуство].

Pascalev, G. & I. Chobanov (1985). *Notable points in the triangle* (In Bulgarian). Sofia: Narodna Prosveta. [Паскалев, Г. & И. Чобанов. (1985). *Забележителни точки в триъгълника*. София: Народна прос-вета].

PROOFS AND SPECIFICATIONS OF EXPERIMENTALLY DERIVED ASSERTIONS BY THE DUALITY PRINCIPLE

Abstract. Properties are proved in the paper, which characterize the geometric constructions described in (Grozdev & Nenkov, 2017). The proposed proofs lead to specifications of some of the properties formulated in (Grozdev & Nenkov, 2017).

✉ **Prof. Sava Grozdev, DSc**
University of Finance, Business and Entrepreneurship
1, Gusla St.
1618 Sofia, Bulgaria
E-mail: sava.grozdev@gmail.com

✉ **Dr. Veselin Nenkov, Assoc. Prof.**
Technical College
31, Sajko Saev St.
5500 Lovech, Bulgaria
E-mail: vnenkov@mail.bg