

БЕЛЕЖКА ВЪРХУ ТЕОРЕМАТА ЗА СТЕПЕННИТЕ СРЕДНИ И ОБУЧАВАЩИЯ ХАРАКТЕР НА ОЛИМПИАДИТЕ

¹Сава Гроздев, ²Веселин Ненков

¹Висше училище по застраховане и финанси – София

²Технически колеж – Ловеч

Резюме. Повод за настоящата бележка е задача 3. за VIII клас от областния кръг на Националната олимпиада по математика, проведен на 8 февруари 2017 г.
Keywords: problem, solution, Olympiad, educational character

Една от задачите на областния кръг по математика за VIII клас през 2017 г. е следната.

За положителните числа a, b, c и d да се докажат неравенствата:

$$\text{а) } \left(\frac{a+b+c+d}{4} \right)^3 \leq \frac{a^3+b^3+c^3+d^3}{4};$$

$$\text{б) } \frac{a^3}{2a^4+1} + \frac{b^3}{2b^4+1} + \frac{c^3}{2c^4+1} \leq 1, \text{ ако } a+b+c=3.$$

Съдържателната математическа част на тази задача е свързана с теоремата за степенните средни, която може да се формулира по следния начин.

Теорема за степенните средни. Дадени са положителните числа $a_1, a_2, \dots, a_n$. Ако $\alpha < \beta$, то степенното средно от ред α не надминава степенното средно от ред β , т.е.

$$\left(\frac{a_1^\alpha + a_2^\alpha + \dots + a_n^\alpha}{n} \right)^{\frac{1}{\alpha}} \leq \left(\frac{a_1^\beta + a_2^\beta + \dots + a_n^\beta}{n} \right)^{\frac{1}{\beta}}.$$

Равенството се достига само ако $a_1 = a_2 = \dots = a_n$.

Тази теорема обобщава неравенствата между класическите средни величини: средното аритметично (степенното средно при $\alpha = 1$), средното квадратично (степенното средно при $\alpha = 2$), средното хармонично (степенното

средно $a = -1$), при $\alpha \rightarrow 0$), средното геометрично (степенното средно при $\alpha \rightarrow 0$) и др. При $\alpha = 1$ и $\beta = k$, където k е цяло число, по-голямо от 1, се получава следният частен случай, който е достъпен за ученици:

$$\left(\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \right)^k \leq \frac{a_1^k + a_2^k + \dots + a_n^k}{n}.$$

Разглежданата задача от областния кръг е свързана с по-частните случаи на горния частен случай на теоремата за степенните средни, когато $k = 2$ или 3, а $n = 2, 3$ или 4. Твърде често тези частни случаи се разглеждат в школите по математика. Поради тази причина в указанията към областните комисии беше изрично споменато, че е разрешено използването на теоремата за степенните средни, без да е необходимо тя да се доказва дори и в случаите, свързани с олимпиадната задача. Теоремата не е от учебното съдържание по математика за ЗИП, като е естествено да се предполага, че по-голямата част от осмокласниците, участващи в областния кръг, не я познават в общия ѝ вид. Целта за включване на разглежданата задача в темата е да им са даде възможност да проявят творчество и да докажат постъпково споменатите частни случаи, като използват добре известното им неравенство между средното аритметично и средното геометрично първоначално на две, а след това и на повече положителни числа. Най-важната цел на задачата е учениците да достигнат (самостоятелно или с позоваване на теоремата за степенните средни) до неравенството

$$\left(\frac{a+b+c}{3} \right)^3 \leq \frac{a^3+b^3+c^3}{3},$$

където a, b и c са положителни числа, след което да го приложат за доказване на твърдението от точка б). Самото приложение изисква досещане и техническа сръчност, което представлява най-трудната част на задачата за тези, които познават теоремата за степенните средни. Ако ученикът е почувствал духа на подточка а), той би могъл да се справи и с подточка б), използвайки кубични корени. Ето самото решение на б).

От неравенството между средното аритметично и средното геометрично имаме:

$$2a^4 + 1 = a^4 + a^4 + 1 \geq 3\sqrt[3]{a^8} \text{ и отгук } \frac{a^3}{2a^4 + 1} \leq \frac{a^3}{3\sqrt[3]{a^8}} = \frac{1}{3}\sqrt[3]{a}.$$

Тогава $\frac{a^3}{2a^4 + 1} + \frac{b^3}{2b^4 + 1} + \frac{c^3}{2c^4 + 1} \leq \frac{1}{3}(\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b} + \sqrt[3]{c})$. Сега от неравенството

$$\left(\frac{a+b+c}{3} \right)^3 \leq \frac{a^3+b^3+c^3}{3} \text{ следва, че}$$

$$\frac{\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b} + \sqrt[3]{b}}{3} \leq \sqrt[3]{\frac{a+b+c}{3}} = \sqrt[3]{\frac{3}{3}} = 1, \text{ с което твърдението в б) е доказано.}$$

По време на провеждането на областния кръг осмокласниците все още не са изучавали кубичен корен. Поради това предлагаме решение без кубичен корен и ако някой попита защо се излага решение с кубичен корен, то отговорът е, че именно това е естественият ход за решаване на задачата. Не бива да се забравя, че основната цел на олимпиадите не е селекция за национален отбор. Селекцията е важна, но много по-важно е учениците да повишат знанията и уменията си по математика чрез участието си в олимпиадите. Ето все пак решение без кубичен корен.

Използването на кубичен корен не е задължително и при прилагането на неравенството между средното аритметично и средното геометрично. По-точно, в разглежданата задача това неравенство може да се запише без корени така:

$$\left(\frac{2a^4+1}{3}\right)^3 \geq a^8, \text{ т.е. } (2a^4+1)^3 \geq 27a^8. \text{ Оттук } \frac{a^9}{(2a^4+1)^3} \leq \frac{a^9}{27a^8} = \frac{1}{27}a, \text{ т.е.}$$

$$\left(\frac{a^3}{2a^4+1}\right)^3 \leq \frac{1}{27}a. \text{ По същия начин } \left(\frac{b^3}{2b^4+1}\right)^3 \leq \frac{1}{27}b \text{ и } \left(\frac{c^3}{2c^4+1}\right)^3 \leq \frac{1}{27}c.$$

Като сумираме последните три неравенства, стигаме до

$$\left(\frac{a^3}{2a^4+1}\right)^3 + \left(\frac{b^3}{2b^4+1}\right)^3 + \left(\frac{c^3}{2c^4+1}\right)^3 \leq \frac{1}{27}(a+b+c) = \frac{1}{27} \cdot 3 = \frac{1}{9}.$$

По-нататък с помощта на $\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^3 \leq \frac{a^3+b^3+c^3}{3}$ имаме:

$$\left(\frac{\frac{a^3}{2a^4+1} + \frac{b^3}{2b^4+1} + \frac{c^3}{2c^4+1}}{3}\right)^3 \leq \frac{\left(\frac{a^3}{2a^4+1}\right)^3 + \left(\frac{b^3}{2b^4+1}\right)^3 + \left(\frac{c^3}{2c^4+1}\right)^3}{3} \leq \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{9} = \frac{1}{27}.$$

Оттук $\left(\frac{a^3}{2a^4+1} + \frac{b^3}{2b^4+1} + \frac{c^3}{2c^4+1}\right)^3 \leq 1$ и като използваме, че степените

(в нашия случай целочислени) на по-големите от 1 числа са по-големи от 1, заключаваме, че:

$$\frac{a^3}{2a^4+1} + \frac{b^3}{2b^4+1} + \frac{c^3}{2c^4+1} \leq 1.$$

За пълнота на разглежданията привеждаме решението и на подточка а) на задачата, както и на неравенството $\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^3 \leq \frac{a^3+b^3+c^3}{3}$. За целта ще

използваме, че $\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \leq \frac{a^2+b^2}{2}$. Тогава

$$\left(\frac{a+b}{2}\right)^3 = \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \cdot \frac{a+b}{2} \leq \frac{a^2+b^2}{2} \cdot \frac{a+b}{2} = \frac{a^3+b^3}{2} - \frac{a^3+b^3-a^2b-ab^2}{4}$$

и тъй като

$$\frac{a^3+b^3-a^2b-ab^2}{4} = \frac{a^2(a-b)-b^2(a-b)}{4} = \frac{(a-b)(a^2-b^2)}{4} = \frac{(a-b)^2(a+b)}{4} \geq 0,$$

то от горното следва, че $\left(\frac{a+b}{2}\right)^3 \leq \frac{a^3+b^3}{2}$. Следователно

$$\leq \frac{\frac{a^3+b^3}{2} + \frac{c^3+d^3}{2}}{2} = \frac{a^3+b^3+c^3+d^3}{4}.$$

$$\left(\frac{a+b+c+d}{4}\right)^3 = \left(\frac{\frac{a+b}{2} + \frac{c+d}{2}}{2}\right)^3 \leq \frac{\left(\frac{a+b}{2}\right)^3 + \left(\frac{c+d}{2}\right)^3}{2} \leq$$

$$\text{Тъй като } \left(\frac{a+b+c}{3}\right)^3 = \left(\frac{a+b+c + \frac{a+b+c}{3}}{4}\right)^3, \text{ можем да приложим вече}$$

доказаното неравенство от а) за $d = \frac{a+b+c}{3}$. Имаме:

$$\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^3 = \left(\frac{a+b+c + \frac{a+b+c}{3}}{4}\right)^3 \leq \frac{a^3+b^3+c^3 + \left(\frac{a+b+c}{3}\right)^3}{4}$$

и оттук $4\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^3 \leq a^3+b^3+c^3 + \left(\frac{a+b+c}{3}\right)^3$, т.е.

$$3\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^3 \leq a^3 + b^3 + c^3.$$

Заклучаваме, че $\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^3 \leq \frac{a^3 + b^3 + c^3}{3}.$

В края на бележката ще отбележим още веднъж основната теза: олимпиади по математика, както и по останалите предмети, трябва се схващат като прояви, в които учениците и учителите се докосват до важни факти в науката, придобиват знания и умения за тяхното прилагане и формират траен интерес към дисциплианата, в която се изявяват.

REFERENCES / ЛИТЕРАТУРА

Grozdev, S. (2007). *For High Achievements in Mathematics. The Bulgarian Experience (Theory and Practice)*. Sofia: ADE, 295 pages.

A NOTE ON THE THEOREM OF THE POWER AVERAGES AND THE EDUCATIONAL CHARACTER OF THE OLYMPIADS

Abstract. The present note is in connection with Problem 3 for 8th grade from the Regional round of the National Olympiad in Mathematics, held on February 8, 2017.

✉ **Prof. Sava Grozdev, DSc.**

University of Finance, Business and Entrepreneurship
1, Gusla Str.
1618 Sofia, Bulgaria
E-mail: sava.grozdev@gmail.com

✉ **Dr. Veselin Nenkov, Assoc. Prof.**

Technical College, Lovech
31, Sajko Saev Str.
5500 Lovech, Bulgaria
E-mail: vnenkov@mail.bg