

АНАЛИЗ НА ЗАДАЧИТЕ ОТ НАЦИОНАЛНАТА СТУДЕНТСКА ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКА

Сава Гроздев, Веселин Ненков

Резюме. Статията предлага състезателните теми от Националната студентска олимпиада по математика през 2012 г. Разгледани са методически решения на задачите за трите групи студенти в зависимост от профила на висшето училище, в което учат.

Keywords: Olympiad, problem solving, university student.

Националната студентска олимпиада по математика (НСОМ) е състезание по математика между студенти по бакалавърски или магистърски програми. Тя се организира от 1974 г. от висшите училища, Институт по математика и информатика при БАН и Съюз на математиците в България. Целта е да се повишава интересът на студентите към математиката и да се създават условия за обмен на опит сред преподавателските екипи. През последните две години НСОМ се провежда под патронажа на проф. Сергей Игнатов, министър на образованието, младежта и науката.

Право да участва в НСОМ като състезател има всеки студент по бакалавърска или магистърска програма на висше училище в Република България. Тази година по инициатива на доц. д-р Росен Николаев – Председател на Организационния комитет, в олимпиадата взеха участие и представители на Техническия университет в гр. Клуж, Румъния. Студентите бяха разпределени в три състезателни групи според професионалното направление, в което е специалността им:

Група А – математика, информатика и компютърни науки;

Група Б – природни и технически науки, сигурност и отбрана;

Група В – всички неизброени в групи А и Б.

Най-добре представилите се студенти получават медали съгласно традицията в международните олимпиади по математика – награждават се до 50% от участниците в приблизително съотношение 1:2:3 за златен, сребърен и бронзов медал.

През 2012 г. НСОМ се проведе при домакинството на Икономически университет, гр. Варна. Олимпиадата се състоя от 18 до 20 май 2012 г. в гр. Варна. Съставянето на състезателните теми и проверките на решенията беше осъществена от Националната комисия в състав: проф. дпн Сава Гроздев – председател, гл. ас. Паскал Пиперков – секретар, проф. дмн Гено Николов, доц. д-р Владимир Бабев, доц. д-р Петър Рашков, доц. д-р Владимир Тодоров, доц. д-р Теменужка Пенева, доц. д-р Росен Николаев и доц. д-р Иван Трендафилов.

Ето задачите и техните решения:

Група А

Задача 1. Нека A и B са произволни $n \times n$ матрици с реални елементи така, че $A \neq B$, $A^3 = B^3$ и $A^2B = B^2A$. Да се докаже, че матрицата $A^2 + B^2$ е необратима.

Решение: Да допуснем, че $A^2 + B^2$ притежава обратна матрица $(A^2 + B^2)^{-1}$. Тогава:

$$A - B = (A^2 + B^2)^{-1} (A^2 + B^2) (A - B) = (A^2 + B^2)^{-1} (A^3 - A^2B + B^2A - B^3) = O$$

където O е нулевата матрица. Получаваме, че $A = B$, което противоречи на условието на задачата.

Забележка. Интересно е да се забележи, че съществуват матрици A и B , изпълняващи условията от задачата. Достатъчно е да разгледаме $A = O$ и $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, при което $A \neq B$. Тогава $B^2 = O$, откъдето следва, че $A^3 = B^3 = O$ и $A^2B = B^2A = O$. Освен това $A^2 + B^2 = O$, която е необратима матрица.

Задача 2. Да се докаже неравенството

$$\int_0^1 ((1+x^2)^n + (1-x^2)^n) dx \geq \frac{2^{n+1}}{2n+1}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Решение: Ако $I_n = \int_0^1 ((1+x^2)^n + (1-x^2)^n) dx$, то след интегриране по части получаваме

$$I_n = x((1+x^2)^n + (1-x^2)^n) \Big|_0^1 - 2n \int_0^1 (x^2(1+x^2)^n - x^2(1-x^2)^n) dx = 2^n - 2n(I_n - I_{n-1})$$

т.е. в сила е рекурентната връзка $I_n = \frac{2n}{2n+1} I_{n-1} + \frac{2^n}{2n+1}$. По-нататък ще използва-

ме индукция по n . При $n = 0$ неравенството се превръща във вярното равенство $I_0 = 2$. Допускаме, че неравенството е вярно за $n-1$, $n \in \mathbb{N}$. Тогава:

$$I_n \geq \frac{2n}{2n+1} \cdot \frac{2^n}{2n-1} + \frac{2^n}{2n+1} = \frac{2^{n+1}}{2n+1} \left(\frac{n}{2n-1} + \frac{1}{2} \right) = \frac{2^{n+1}}{2n+1} \cdot \frac{4n-1}{4n-2} > \frac{2^{n+1}}{2n+1}.$$

Задача 3. Нека $P(z) = \sum_{k=0}^n a_k z^k$ е алгебричен полином от степен $n \geq 2$, чиито коефициенти са комплексни числа, изпълняващи условието $|a_k| = 1$, $k = 0, 1, \dots, n$. Да се докаже, че:

а) ако $P(\alpha) = 0$, то $|\alpha| < 2 - \frac{1}{2^n}$;

б) съществува полином $P(z)$ с посочените свойства и $\alpha \in \mathbb{R}$ така, че $P(\alpha) = 0$ и $|\alpha| > 2 - \frac{1}{2^{n-1}}$.

Решение: а) Нека α е корен на $P(z) = 0$. От неравенството на триъгълника имаме:

$$0 = |P(\alpha)| \geq |\alpha|^n - \sum_{k=0}^{n-1} |\alpha|^k = |\alpha|^n - \frac{|\alpha|^n - 1}{|\alpha| - 1} = \frac{|\alpha|^{n+1} - 2|\alpha|^n + 1}{|\alpha| - 1}.$$

Ако $Q(t) = t^{n+1} - 2t^n + 1$, то горното неравенство се записва във вида $0 = |P(\alpha)| \geq \frac{Q(|\alpha|)}{|\alpha| - 1}$. От друга страна $Q'(t) = (n+1)t^{n-1} \left(t - \frac{2n}{n+1} \right)$, откъдето следва, че $Q(t)$ намалява в интервала $\left[0; \frac{2n}{n+1} \right]$ и расте в интервала $\left[\frac{2n}{n+1}; +\infty \right)$, като при това $1 < \frac{2n}{n+1} < 2$. Освен това $Q(1) = 0$ и $Q(2) = 1$. Заключаваме, че уравнението $Q(t) = 0$ има единствен корен t_0 в интервала $(1; 2)$, $Q(t) < 0$ за $t \in (1; t_0)$ и $Q(t) > 0$ за $t \in (t_0; +\infty)$. Сега да забележим, че

$Q\left(2 - \frac{1}{2^n}\right) = \left(2 - \frac{1}{2^n}\right)^n \left(2 - \frac{1}{2^n} - 2\right) + 1 = -\left(1 - \frac{1}{2^{n+1}}\right)^n + 1 > 0$. Следователно числото $2 - \frac{1}{2^n}$ се намира надясно от t_0 и $Q(t) > 0$ за $t \geq 2 - \frac{1}{2^n}$. Ако допуснем, че $|\alpha| \geq 2 - \frac{1}{2^n}$, то ще получим, че $0 = |P(\alpha)| \geq \frac{Q(|\alpha|)}{|\alpha| - 1} > 0$, т.е. $0 > 0$, което е противоречие. Значи $|\alpha| < 2 - \frac{1}{2^n}$.

б) Нека $R(z) = z^n - \sum_{k=0}^{n-1} z^k$. Тогава $Q(z) = (z-1)R(z)$ и от доказаното за Q в а) следва, че $R(z)$ има единствен положителен корен α , който е разположен в интервала $(1; 2)$. Ще докажем, че $|\alpha| > 2 - \frac{1}{2^{n-1}}$. Достатъчно е да проверим, че $Q\left(2 - \frac{1}{2^{n-1}}\right) < 0$. За целта ще използваме неравенството на Бернули $(1+x)^n \geq 1+nx$, което е строго при $n > 1$ и $x > -1$. Имаме:

$$Q\left(2 - \frac{1}{2^{n-1}}\right) = \left(2 - \frac{1}{2^{n-1}}\right)^n \left(2 - \frac{1}{2^{n-1}} - 2\right) + 1 = 1 - 2\left(1 - \frac{1}{2^n}\right)^n < 1 - 2\left(1 - \frac{n}{2^n}\right) = \frac{n}{2^{n-1}} - 1 \leq 0,$$

с което задачата е решена.

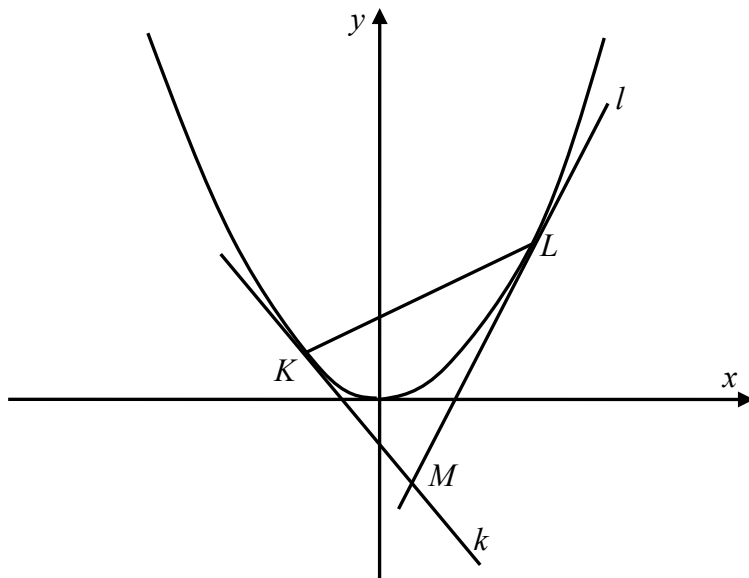
Група Б

Задача 1. Върху параболата $y = x^2$ са избрани две различни точки K и L . Допирателните към графиката на параболата в тези точки се пресичат в точка M . Да се намери отношението между лицата на $\triangle KLM$ и частта от този триъгълник, която е заключена между графиката на параболата и отсечката KL . Да се докаже, че това отношение не зависи от избора на K и L .

Решение: Нека $K(x_1; x_1^2)$ и $L(x_2; x_2^2)$, като $x_1 < x_2$. Правата KL се задава с уравнението $y = (x_1 + x_2)x - x_1x_2$. Ъгловите коефициенти на допирателните k и l (вж. чертежа) към графиката на параболата съответно в точките K и L са $2x_1$ и $2x_2$. Имаме $k: y = 2x_1x - x_1^2$ и $l: y = 2x_2x - x_2^2$. Тогава пресечната точка M на k и l е $M\left(\frac{x_1 + x_2}{2}; x_1x_2\right)$.

За лицето S^* на частта от $\triangle KLM$, която е заключена между графиката на параболата и отсечката KL , намираме:

$$S^* = \int_{x_1}^{x_2} \left[(x_1 + x_2)x - x_1x_2 - x^2 \right] dx = \int_{x_1}^{x_2} \left[(x_2 - x_1)(x - x_1) - (x - x_1)^2 \right] dx = \frac{(x_2 - x_1)^3}{6}$$



От друга страна, за лицето S на $\triangle KLM$ получаваме:

$$S = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 \\ 1 & x_2 & x_2^2 \\ 1 & \frac{x_1 + x_2}{2} & x_1 x_2 \end{vmatrix} = \frac{1}{4} (x_2 - x_1)^3.$$

Следователно, търсеното отношение е $S : S^* = 3 : 2$, което очевидно не зависи от избора на точките K и L .

Задача 2. Да се намерят всички функции $f : (0; +\infty) \rightarrow (0; +\infty)$, за които $f(f(x)) = 6x - f(x)$ за всяко $x \in (0; +\infty)$.

Решение: Нека $a_1 \in (0; +\infty)$ е произволно и $a_{n+1} = f(a_n)$ за всяко естествено число n . Ясно е, че $a_n > 0$ и $a_{n+2} = f(f(a_n)) = 6a_n - a_{n+1}$, т.е. $a_{n+2} = 6a_n - a_{n+1}$ за всяко $n = 1, 2, \dots$. Характеристичното уравнение на рекурентната редица $\{a_n\}_1^\infty$ е $t^2 + t - 6 = 0$, чиито корени са $t_1 = -3$ и $t_2 = 2$. Тогава $a_n = C_1 2^n + C_2 (-3)^n$, къ-

дето константите C_1 и C_2 подлежат на определяне. Забелязваме, че за достатъчно големи нечетни n изразът $C_1 2^n + C_2 (-3)^n$ е отрицателен и за да бъде изпълнено условието $a_n > 0$, необходимо е $C_2 = 0$. Заклучаваме, че $a_n = C_1 2^n$. При $n = 1$ получаваме $a_1 = 2C_1$, откъдето $C_1 = \frac{1}{2} a_1$. Тогава $f(a_1) = a_2 = C_1 2^2 = \frac{1}{2} a_1 \cdot 2^2 = 2a_1$, т.е. $f(a_1) = 2a_1$. Тъй като $a_1 \in (0; +\infty)$ беше избрано произволно, заключаваме, че $f(x) = 2x$ за всяко $x \in (0; +\infty)$. Обратно, с непосредствена проверка се установява, че функцията $f(x) = 2x$ удовлетворява функционалното уравнение от условието на задачата.

Задача 3. Да се докаже, че ако $\alpha \neq -1$ е реално число, то

$$\int_0^{\pi/2} (1 + \sin x)^\alpha dx \geq \frac{2^{\alpha+1} - 1}{\alpha + 1}.$$

Решение: Тъй като за всяко x е изпълнено $\cos x \leq 1$, то

$$\int_0^{\pi/2} (1 + \sin x)^\alpha dx \geq \int_0^{\pi/2} (1 + \sin x)^\alpha \cos x dx = \int_0^{\pi/2} (1 + \sin x)^\alpha d(1 + \sin x) = \frac{(1 + \sin x)^{\alpha+1}}{\alpha + 1} \Bigg|_0^{\pi/2} = \frac{2^{\alpha+1} - 1}{\alpha + 1}.$$

Група В

Задача 1. Да се докаже, че матрицата $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ удовлетворява равенството $A^{2012} + 3^{1005} A^2 = O$, където O е нулевата матрица.

Решение: Непосредствено се проверява, че $A^6 = -27E$, където E е единичната матрица от ред 2×2 . Тогава $A^{2012} = (A^6)^{335} A^2 = (-27E)^{335} A^2 = -3^{1005} A^2$ и следователно

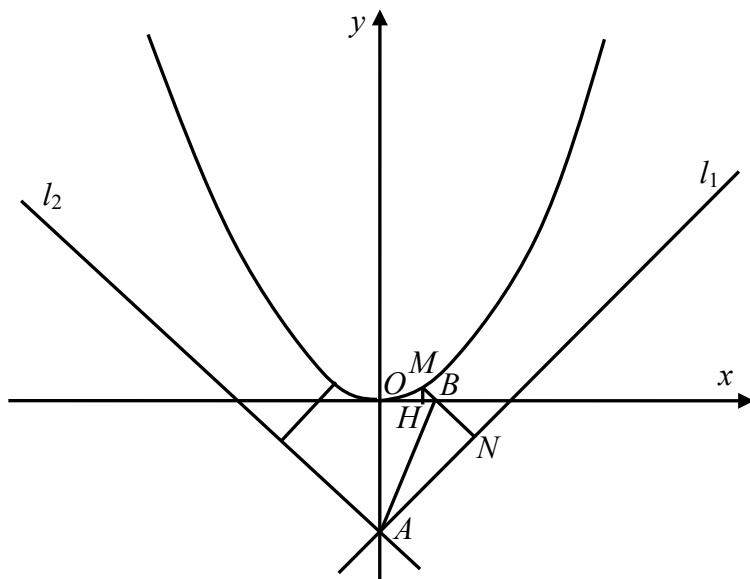
$$A^{2012} + 3^{1005} A^2 = -3^{1005} A^2 + 3^{1005} A^2 = O.$$

Задача 2. Нека a е най-малкото естествено число, за което параболата $p: y = ax^2$ няма общи точки с правите $l_1: y = ax - 2$ и $l_2: y = -ax - 2$. Нека m_i ($i = 1, 2$) е отсечката с най-малката дължина, която свързва точка от параболата p с точка от правата l_i .

а) Да се намерят дължините на отечките m_1 и m_2 .

б) Да се намери лицето на фигурата, оградена от p , l_1 , l_2 , m_1 и m_2 .

Решение:



Системите $\begin{cases} y = ax^2 \\ y = ax - 2 \end{cases}$ и $\begin{cases} y = ax^2 \\ y = -ax - 2 \end{cases}$ нямат решение точно тогава, когато е в сила неравенството $a^2 - 8a < 0 \Leftrightarrow a(a - 8) < 0$. Най-малкото естествено число a , което е решение на последното неравенство е $a = 1$. Оттук намираме $p: y = x^2$, $l_1: y = x - 2$ и $l_2: y = -x - 2$.

а) Нека $m_1 = MN$ ($M \in p$ и $N \in l_1$) е най-късата отсечка, свързваща p и l_1 . Тъй като $MN \perp l_1$, правата MN има уравнение $y = -x + b$. Нека абсцисата на M е x_0 . Тогава $M(x_0; x_0^2)$ и $b = x_0^2 + x_0$. От условието $N = l_1 \cap MN$ намираме

$$N\left(\frac{x_0^2 + x_0 + 2}{2}; \frac{x_0^2 + x_0 - 2}{2}\right).$$

$$\text{Оттук } m_1 = \sqrt{\left(\frac{x_0^2 + x_0 + 2}{2} - x_0\right)^2 + \left(\frac{x_0^2 + x_0 - 2}{2} - x_0^2\right)^2} = \frac{\sqrt{2}}{2}(x_0^2 - x_0 + 2), \text{ тъй}$$

като $x_0^2 - x_0 + 2 > 0$. Имаме $m_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}(x_0^2 - x_0 + 2) = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\left(x_0 - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{7}{4}\right)$. Оттук заключаваме, че най-малката стойност на m_1 се достига при $x_0 = \frac{1}{2}$ и е равна на $\frac{7}{8}\sqrt{2}$. Поради симетрията

$$m_1 = m_2 = \frac{7}{8}\sqrt{2}.$$

б) Ота) следва, че $M\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{4}\right)$ и $N\left(\frac{11}{8}; -\frac{5}{8}\right)$. Нека A е пресечната точка на правите l_1 и l_2 , B е пресечната точка на правата MN и абсцисната ос Ox , а H е проекцията на M върху Ox . Имаме: $A(0; -2)$, $B\left(\frac{3}{4}; 0\right)$ и $H\left(\frac{1}{2}; 0\right)$. С S_1 означаваме лицето на криволинейния $\triangle OHM$, а с S_2 , S_3 и S_4 – лицата съответно на правоъгълните триъгълници HBM , ABO и ABN . Последователно намираме: $S_1 = \int_0^{1/2} x^2 dx = \frac{1}{24}$, $S_2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{32}$, $S_3 = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{4}$ и $S_4 = \frac{1}{2} AN \cdot BN = \frac{1}{2} \cdot \frac{11}{8} \sqrt{2} \cdot \frac{5}{8} \sqrt{2} = \frac{55}{64}$. Тогава $S_1 + S_2 + S_3 + S_4 = \frac{1}{24} + \frac{1}{32} + \frac{3}{4} + \frac{55}{64} = \frac{323}{192}$ и поради симетрията търсеното лице е $2 \cdot \frac{323}{192} = \frac{323}{96}$.

Задача 3. Да се докаже, че $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} < \left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^n$ за всяко естествено число $n \geq 2$.

Решение: Записваме неравенството във вида $\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1} < \left(\frac{n}{n-1}\right)^n$, откъдето

$$\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1} < \left(\frac{n}{n-1}\right)^n \Leftrightarrow \left(\frac{n^2}{n^2-1}\right)^n > \frac{n+1}{n} \Leftrightarrow \left(1 + \frac{1}{n^2-1}\right)^n > 1 + \frac{1}{n}. \text{ Последното}$$

следва от неравенството на Бернули $(1+x)^n \geq 1+nx$, което е вярно при $x \geq -1$.

Наистина, $\left(1 + \frac{1}{n^2-1}\right)^n \geq 1 + \frac{n}{n^2-1} = \frac{n^2+n-1}{n^2-1}$ и непосредствено се проверява, че $\frac{n^2+n-1}{n^2-1} > 1 + \frac{1}{n}$.

✉ **Сава Гроздев**

професор, доктор по математика, доктор на педагогическите науки
Институт по математика и информатика – БАН
ул. „Акад. Г. Бончев”, бл. 8, 1113 София, България
e-mail: sava.grozdev@gmail.com

✉ **Веселин Ненков Ненков**

доктор по математика
Технически колеж Ловеч
ул. „Съйко Съев” № 31, Ловеч
e-mail: vnenkov@mail.bg

ANALYSIS OF THE PROBLEMS FROM THE NATIONAL OLYMPIAD IN MATHEMATICS FOR UNIVERSITY STUDENTS

Sava Grozdev, Veselin Nenkov

Abstract. The paper proposes the competition papers of the National Olympiad in Mathematics for University students in 2012. Methodological solutions of the problems are considered for the three groups of students corresponding to the profile of the Higher school where they study.

✉ **Sava Grozdev**

Professor, Doctor in Mathematics, DSc in Pedagogy
Institute of Mathematics and Informatics – BAS
Acad. G. Bonchev Street, bl. 8
1113 Sofia, Bulgaria
e-mail: sava.grozdev@gmail.com

✉ **Veselin Nenkov**

Doctor in Mathematics
Technical College Lovech
31, Sajko Saev Street
Lovech
e-mail: vnenkov@mail.bg