

АЛГЕБРАИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ УЛИТОК ПАСКАЛЯ ПОРЯДКА n

Сергей Ларин

*Красноярский государственный педагогический университет
им. В.П. Астафьева (Россия)*

Аннотация. В статье дано определение геометрической кривой, названной улиткой Паскаля порядка n , которое является обобщением известного понятия улитки Паскаля для числа окружностей $n = 2$, и решена задача ее алгебраического описания в виде многочлена с комплексными коэффициентами при условии, что модуль комплексной переменной равен 1. На примере проведенных исследований продемонстрированы роль и значение информационной составляющей в виде анимационных рисунков, выполненных в компьютерной среде GeoGebra. Они использовались при экспериментировании, они сопровождают доказательства, делая некоторые из них очевидными в буквальном смысле этого слова, достоверность утверждений подтверждается их моделированием анимационными рисунками.

Ключевые слова: анимационные рисунки; среда GeoGebra; улитка Паскаля; комплексная плоскость; преобразование; многочлен

1. Улитка Паскаля порядка n

Исходным объектом исследования явилась кривая, названная французским математиком XVII в. Робервалем улиткой Паскаля в честь Этьена Паскаля (отца более известного математика Блеза Паскаля), который занимался ее изучением, как сказано в (Pidou, 1979). Статья является продолжением исследований обобщения этого понятия, начатых в (Larin & Mayer, 2018). Для демонстрации доказываемых утверждений использованы анимационные рисунки, выполненные в среде GeoGebra¹⁾. С ее анимационными возможностями в образовании можно познакомиться, например, по учебным пособиям (Larin, 2015), (Larin, 2018). Анимационные рисунки особенно эффективны при исследовании преобразований, которые трудно представить, например, при определении числа вращений одного объекта относительно другого, о чем пойдет речь ниже. Мы будем использовать следующие виды анимации.

1) Геометрическая анимация, основанная на сохранении последовательности построения чертежа при перемещении его элементов.

2) Ползунковая анимация, позволяющая изменять параметр с помощью инструмента под названием «Ползунок». Он представляет собой отрезок

(числовой прямой) с точкой на нем, изображающей параметр, который изменяется перемещением точки по отрезку.

3) Обусловленная анимация, которая обеспечивается условиями видимости (фигуры, формулы, текста).

Напомним известное кинематическое определение улитки Паскаля. Построим на плоскости окружность с центром в точке O и отметим на ней точку A . Построим вторую окружность того же радиуса, которая касается первой внешним образом в точке A . Выберем на второй окружности точку K , из центра O' второй окружности проведем луч $O'K$ и на нем отметим точку L (от слов Pascal's limacon – улитка Паскаля) (рис. 1). Теперь заставим вторую окружность катиться без скольжения по первой окружности. При этом точка L , оставляя след, вычертит линию, которая называется *улиткой Паскаля*.

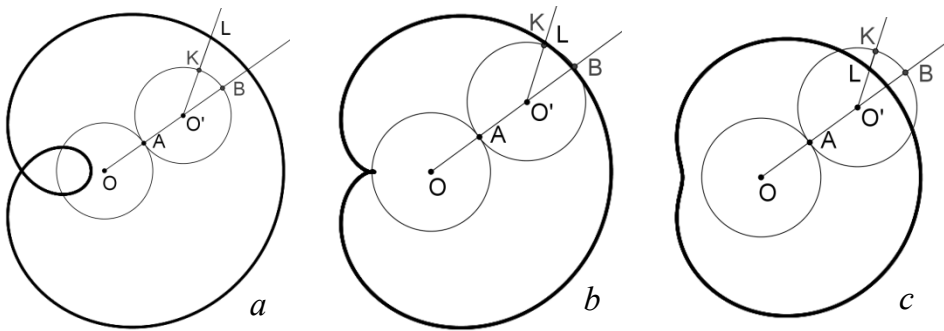


Рис. 1

Если радиус окружностей обозначить через r , а расстояние $O'L$ через h , то число $d = h - r$ называется *отклонением*. При этом, если $d = 0$, то получаем кривую, называемую кардиоидой благодаря сходству ее со стилизованным изображением сердца. Если $d > 0$ ($d < 0$), то получаем удлиненную (соответственно укороченную) кардиоиду. На рисунке 1a изображена улитка Паскаля с положительным отклонением, на рисунке 1b – кардиоида, и на рисунке 1c – улитка Паскаля с отрицательным отклонением.

Обобщим понятие улитки Паскаля, рассматривая на плоскости произвольный упорядоченный набор n окружностей, вообще говоря различных радиусов, расположенных так, что каждая из них касается следующей внешним или внутренним образом. На последней окружности зафиксируем некоторую точку и проведем прямую через эту точку и центр последней окружности. Зафиксируем на прямой точку, которую назовем последней точкой улиточной конструкции. Заставим каждую окружность катиться (возможно со скольжением) по предыдущей окружности, совершая при этом целое неотрицательное число

оборотов вокруг своего центра за время одного оборота самой окружности вокруг центра предыдущей окружности. Кривую, которую описывает последняя точка улиточной конструкции, назовем улиткой Паскаля порядка n .

Это описательное определение не является точным, поскольку не указывает механизма, приводящего конструкцию в движение. Приведем конструктивное определение улитки Паскаля порядка n , которое будет состоять из трех частей: 1) определение набора ее числовых характеристик; 2) описание построения улиточной конструкции; 3) определение улитки Паскаля, как линии, вычерчиваемой так называемой последней точкой улиточной конструкции.

Определение 1. *Набором числовых параметров улитки Паскаля порядка n назовем запись вида $L_n((r_1, p_1, k_1), \dots, (r_n, p_n, k_n), d)$, где $r_1, r_2, \dots, r_n$ – упорядоченный набор действительных чисел, отличных от нуля, $r_1 > 0$, числа этого набора будем называть улиточными радиусами; $p_1, p_2, \dots, p_n$ – упорядоченный набор целых чисел, называемых показателями вращений окружностей, где p_1 – целое неотрицательное, а остальные натуральные числа; $k_1, k_2, \dots, k_n$ – упорядоченный набор комплексных чисел, модуль которых равен 1, называемых улиточными коэффициентами, и d – действительное число, называемое отклонением.*

Определение 2. Для любого натурального числа n улиточной конструкции улитки Паскаля порядка n назовем анимационный рисунок, созданный по данному набору числовых параметров $L_n((r_1, p_1, k_1), \dots, (r_n, p_n, k_n), d)$ следующей последовательностью построений на координатной плоскости (в среде GeoGebra).

1. *Предварительные построения.* Строим единичную окружность и ее центр (начало координат) обозначаем через O_1 . Вводим ползунками улиточные радиусы $r_1, r_2, \dots, r_n$ и отклонение d , как действительные числа, и показатели вращений $p_1, p_2, \dots, p_n$, как целые неотрицательные числа. Улиточные коэффициенты $k_1, k_2, \dots, k_n$ вводим в виде точек (комплексных чисел) на единичной окружности. Для построения окружностей улиточной конструкции вводим модули чисел $r'_1 = |r_1|, r'_2 = |r_2|, \dots, r'_n = |r_n|$, $d' = |d|$. На единичной окружности строим точку (комплексное число) z и вводим углы $\varphi = \arg(z)$, $\alpha_j = \arg(k_j)$ для $j = 1, \dots, n$.

2. *Начало построения улиточной конструкции.* Строим окружность с центром в точке O_1 и радиусом r'_1 . Получаем первую окружность улиточной конструкции. Через точку z на единичной окружности проводим луч O_1z и отмечаем точку A_1 пересечения луча с построенной окружностью.

3. *Шаг построения* – построение центра следующей окружности улиточной конструкции. Для общности обозначим $r_{n+1} = d$, $r'_{n+1} = |d|$. Пусть уже построена j -я окружность улиточной конструкции с улиточным радиусом r_j , центром O_j и точка A_j на ней. Поворачиваем точку A_j на угол

$\alpha_j + p_j \varphi$ и получаем точку A'_j . Строим прямую $O_j A'_j$. Строим окружность с центром в точке A'_j и радиусом $r_{j+1} = |r_{j+1}|$. Обозначаем через A и $\bar{A}$ точки пересечения построенной окружности с прямой $O_j A'_j$. Строим окружности с центрами в точках A и $\bar{A}$, проходящие через точку A'_j . Одна из них будет касаться j -й окружности внешним образом, а вторая внутренним. Выбор одной из них осуществляется следующим образом. Если $r_j \geq 0$, то при $r_{j+1} \geq 0$ выбираем ту из точек A и $\bar{A}$ и соответствующих окружностей, для которой окружность с центром в этой точке касается j -й окружности улиточной конструкции внешним образом, а при $r_{j+1} < 0$ ту, для которой окружность с центром в этой точке касается j -й окружности внутренним образом. Если же $r_j < 0$, то наоборот, при $r_{j+1} \geq 0$ выбираем ту, для которой окружность касается j -й окружности внутренним образом, а при $r_{j+1} < 0$ ту, для которой касание внешнее. При $j = n$ выбранную точку называем последней точкой улиточной конструкции и построение закончено. При $j < n$ выбранную точку обозначаем O_{j+1} . Это будет центр следующей $j+1$ -й окружности улиточной конструкции. Обозначаем через A_{j+1} вторую точку пересечения выбранной окружности с прямой $O_j A'_j$. При анимации точки z движение точки A_{j+1} символизирует вращение окружности, на которой она расположена.

Определение 3. Улиткой Паскаля порядка n с набором числовых параметров $L_n((r_1, p_1, k_1), \dots, (r_n, p_n, k_n), d)$ называется линия, которую вычерчивает последняя точка L улиточной конструкции при анимации точки z , расположенной на единичной окружности.

Проследивая построение улиточной конструкции улитки Паскаля порядка n , заключаем, что набор числовых параметров однозначно ее определяет.

По построению улиточной конструкции центром первой окружности являются начало координат. Для обеспечения общности изучения таких кривых будем называть улиткой Паскаля порядка n всякую кривую, подобную построенной в соответствии с определением 2.

2. Определяющий многочлен улитки Паскаля порядка n

Для алгебраического описания улиток Паскаля порядка n всякую точку координатной плоскости с координатами (a, b) будем рассматривать как комплексное число $a + bi$ и координатную плоскость будем называть комплексной плоскостью.

Уточним вид рассматриваемых ниже многочленов.

Определение 4. Многочлен $w(z)$ с комплексными коэффициентами без свободного члена назовем *многочленом порядка n* , если $w(z) = a_1 z^{q_1} + \dots + a_n z^{q_n}$, где коэффициенты $a_1, \dots, a_n$ отличны от нуля и натуральные показатели удовлетворяют условию $q_1 < \dots < q_n$.

Определение 5. Если улитка Паскаля порядка n является образом единичной

На базе анимационного рисунка 2 построим улиточную конструкцию улитки Паскаля порядка 2 (рис. 3а-д), выполняя построения, описанные в пункте 3 определения 2. Точку L на рисунке 2 переименуем в O_2 , а точку L' в точку O'_2 . Проводим окружности с центрами в точках O_2 и O'_2 радиусом r_2 , проходящие через точку A'_1 , и в соответствии с пунктом 3 из определения 2, называем второй окружностью улиточной конструкции окружность с центром O_2 при $r_2 \geq 0$, и окружность с центром O'_2 при $r_2 < 0$. Для каждой из них построим последнюю точку улиточной конструкции, которая при анимации точки z будет вычерчивать улитку порядка 2.

Пусть $r_2 \geq 0$ и, следовательно, второй окружностью улиточной конструкции является окружность с центром в точке O_2 , проходящая через точку A'_1 . Вторую точку пересечения прямой O_1O_2 с этой окружностью обозначим A_2 . Выполним построения, описанные в пункте 3 определения 2, при $j = \bar{1}$. Получаем последние точки L и L' . При $r_2 \geq 0$, $d \geq 0$ в соответствии с пунктом 3 из определения 2 из них выбираем L и присваиваем ей соответствующее условие видимости (рис. 3а), а при $r_2 \geq 0$, $d < 0$ выбираем L' соответствующими условиями видимости (рис. 3б). Включив анимацию точки z , можно наблюдать как последняя точка L (L') совершает $1 + p_1 + p_2 = 4$ оборота вокруг своего центра за время одного оборота точки z по единичной окружности.



Рис. 3а



Рис. 3б

Аналогично появляются последние точки улиточной конструкции M и M' на рисунках 3с и 3д. При $r_2 < 0$, $d \geq 0$ из них в соответствии с пунктом 3 из определения 2 в качестве последней точки выбираем соответствующими условиями видимости точку M' (рис. 3с), а при $r_2 < 0$, $d < 0$ выбираем M (рис. 3д).

Рисунки 3а-д демонстрируют одновременно определяющий многочлен соответствующей улитки Паскаля. Вид его получаем переводом построений на алгебраический язык комплексных чисел. Докажем соответствующее утверждение.

Знание определяющего многочлена улитки $L_n((r_1, p_1, k_1), \dots, (r_n, p_n, k_n), d)$ позволяет построить ее, что называется, одним кликом: достаточно построить единичную окружность с комплексным числом z на ней и ввести (строкой ввода) комплексное число

$$w = (r_1 + r_2)k_1 z^{1+p_1} + \dots + (r_{n-1} + r_n)k_1 \dots k_{n-1} z^{1+p_1+\dots+p_{n-1}} + (r_n + d)k_1 \dots k_n z^{1+p_1+\dots+p_n}.$$

На экране компьютера появляется точка W . Если заставить точку W оставлять след и включить анимацию точки z , то точка W вычертит данную улитку Паскаля. (Можно воспользоваться командой Локус и построить геометрическое место точек W).

3. Построение улиточной конструкции по данному многочлену

Рассмотрим в общем виде запись определяющего многочлена улитки Паскаля порядка n :

$$w(z) = (r_1 + r_2)k_1 z^{1+p_1} + \dots + (r_{n-1} + r_n)k_1 \dots k_{n-1} z^{1+p_1+\dots+p_{n-1}} + (r_n + d)k_1 \dots k_n z^{1+p_1+\dots+p_n} \\ = a_1 z^{q_1} + \dots + a_{n-1} z^{q_{n-1}} + a_n z^{q_n}$$

Считаем, что $d + r_n > 0$, $r_n + r_{n-1} > 0$, ..., $r_2 + r_1 > 0$. Если это не так, то соответствующий коэффициент k_j заменим на $k'_j = -k_j$.

Пусть тригонометрическая форма каждого коэффициента многочлена имеет вид $a_j = m_j t_j$, где $m_j = |a_j|$, $j = 1, \dots, n$. Приравнявая соответствующие коэффициенты, получаем следующие выражения для улиточных параметров.

1) Формулы для улиточных радиусов окружностей и отклонения:

$$r_j = m_{j-1} + \dots + (-1)^j m_1 + (-1)^{j-1} r_1, \quad j \geq 2, \\ d = m_n - m_{n-1} + \dots + (-1)^{n+1} m_1 + (-1)^n r_1.$$

2) Формулы для показателей вращений:

$$p_1 = q_1 - 1, \quad p_n = q_n - q_{n-1} \geq 1, \quad j \geq 2.$$

3) Формулы для угловых коэффициентов окружностей:

$$k_1 = t_1, \quad k_j = t_j / t_{j-1}, \quad j = 2, \dots, n.$$

Используя эти формулы, по произвольному многочлену порядка n и произвольно выбранному радиусу $r_1 > 0$ можно построить улиточную конструкцию улитки Паскаля порядка n , а вместе с тем и вычертить искомую улитку Паскаля. В итоге доказана следующая теорема.

Теорема 2. Пусть дан многочлен $w(z) = a_n z^{q_n} + a_{n-1} z^{q_{n-1}} + \dots + a_2 z^{q_2} + a_1 z$ порядка n и $m_j = |a_j|$, $a_j = m_j t_j$, $j = 1, \dots, n$. Тогда при преобразовании комплексной плоскости, которое задает данный многочлен, образом единичной окружности является улитка Паскаля порядка n с набором числовых параметров

$L_n((r_1, p_1, k_1), \dots, (r_n, p_n, k_n), d)$, где параметры улиточной конструкции находятся через коэффициенты многочлена по приведенным выше формулам.

Замечаем, что по данному многочлену можно построить бесконечное множество улиточных конструкций (в зависимости от выбора радиуса первой окружности), хотя все они приводят к вычерчиванию одной и той же улитки Паскаля. Для достижения однозначности улиточной конструкции целесообразно считать радиус первой окружности равным 1, тогда первая окружность совпадает с единичной окружностью.

В качестве иллюстрации теоремы 2 изготовим анимационный рисунок, который позволит нам по любому многочлену порядка 2 увидеть улитку Паскаля порядка 2 и ее улиточную конструкцию, для которой данный многочлен будем определяющим.

Построение улиточной конструкции по данному многочлену (рис. 4).

1. Строим единичную окружность и точку (комплексное число) z на ней. Строим точки (комплексных числа) a_1, a_2, a_3 . Строим ползунки для целочисленных показателей степеней переменных: q_1 с областью изменения от 1 до 5, q_2 с областью изменения от q_1 до 5 и q_3 с областью изменения от q_2 до 5. Верхнюю границу 5 при желании можно изменить. Строкой ввода строим точку (комплексное число) $w = a_2 z^{q_2} + a_1 z^{q_1}$. Командой Локус строим геометрическое место таких точек w и получаем кривую, которая задается многочленом $w(z) = a_1 z^{q_1} + a_2 z^{q_2}$ при условии $|z| = 1$.



Рис. 4

2. Чтобы убедиться, что построенная кривая является улиткой Паскаля порядка 2 с определяющим многочленом $w(z)$, построим ее улиточную

конструкцию. Для нахождения параметров улиточной конструкции вводим модули $m_1 = |a_1|$, $m_2 = |a_2|$, и тригонометрические части коэффициентов $t_1 = a_1/m_1$, $t_2 = a_2/m_2$. Строим ползунок для параметра $r_1 > 0$ и вводим числа $r_2 = m_1 - r_1$ и $d = m_2 - m_1 + r_1$. Вводим углы $\varphi = \arg(z)$, $\alpha_1 = \arg(t_1)$, $\alpha_2 = \arg(t_2)$. Вводим показатели вращений $p_1 = q_1 - 1$, $p_2 = q_2 - q_1$ и угловые коэффициенты $k_1 = t_1$, $k_2 = t_2/t_1$. Теперь по набору числовых параметров $L((r_1, p_1, k_1), (r_2, p_2, k_2), d)$ строим улиточную конструкцию, следуя определению 2, и убеждаемся, что ее последняя точка совпадает с построенной точкой w .

Изменяя параметр r_1 , получаем различные улиточные конструкции одной и той же улитки Паскаля порядка 2. На рисунке 4 преобразование построенной улитки достигается перемещением коэффициентов a_1 и a_2 данного многочлена, а также изменением показателей q_1 , q_2 переменной $\bar{z}$.

Сформулируем следствие из теорем 1 и 2, которое дает алгебраическое описание улиток Паскаля порядка n .

Следствие. Улитки Паскаля порядка n есть в точности образы единичной окружности при преобразованиях комплексной плоскости, которые задают многочлены порядка n .

Примечания

1. GeoGebra: official site [electronic resource]. Access mode: <http://www.geogebra.org>

ЛИТЕРАТУРА

- Пидоу, Д. (1979). *Геометрия и искусство*. Пер. с англ. Ю. А. Дпнилова и с предисл. И. М. Яглома. Москва: Мир, 332 с.
- Ларин, С. (2015). *Компьютерная анимация в среде GeoGebra на уроках математики*. Ростов-на-Дону: «Легион».
- Ларин, С. (2018). *Методика обучения математике. Компьютерная анимация в среде GeoGebra*. Москва: «Юрайт».

REFERENCES

- Pidou, D. (1979). *Geometry and Art*. Translation by Yu. A. Danilov and with a foreword by I.M. Yaglom. Moscow: Mir, 332 p.
- Larin, S., V. Mayer (2018). The Role of computer animation in mathematics teaching, *Mathematics and Informatics. Bulgarian Journal of Educational Research and Practice*, V.61, 6. Sofia, 542 – 552.

- Larin, S. V. (2015). *Computer animation in GeoGebra platform in mathematics classes*. Rostov-na-Donu: Legion.+
Larin, S. (2018). *Mathematics training. Computer animation in the GeoGebra environment*. Moscow: "Iright".

ALGEBRAIC DESCRIPTION OF PASCAL'S SNAILS OF ORDER n

Abstract. As a generalization of the well-known concept of Pascal's snail for two circles a geometric notion of Pascal's snail of order n is introduced in the paper for n circles. It is solved the problem of its algebraic description in the form of a polynomial with complex coefficients under the condition that the module of the complex variable is equal to 1. The role and importance of the information component is demonstrated by an example of animation drawings in GeoGebra environment, which have been used during the experiments. Some of the accompanying proofs turn out to be obvious in verbal sense and the realibility of the assertions is confirmed by animation drawing models.

Keywords: animated drawings; GeoGebra environment; Pascal's snail; complex plane; transformation; polynomial

✉ **Prof. Sergey Larin, DSc.**
School of Mathematics, Physics and Computer Technology
Krasnoyarsk State Pedagogical University
Krasnoyarsk, Russia
E-mail: larin_serg@mail.ru